Lời giải Đề thi HSGQG môn Toán 2025

Đội HLV TNVMO
Nguyễn Nhất Huy, Phạm Trần Minh Đức, Nguyễn Tiến Đức,
Cao Quốc Hưng, Nguyễn Nam, Tống Hữu Nhân, Mai Trung Nguyên,
Phạm Hoàng Sơn, Nguyễn Công Thành, Đào Trọng Toàn, Bùi Khánh Vĩnh

Ngày 25 tháng 12 năm 2024

1. Đề bài

Ngày thi thứ nhất

Bài 1 (7 điểm). Xét đa thức $P(x) = x^4 - x^3 + x$.

a) Chứng minh rằng với mọi số dương a, đa thức $P(x) - a$ có duy nhất một nghiệm dương.

b) Xét dãy số (a_n) được xác định bởi $a_1 = \frac{1}{3}$ và với mọi $n \geqslant 1$, a_{n+1} là nghiệm dương của đa thức $P(x) - a_n$. Chứng minh rằng dãy (a_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Bài 2 (7 điểm). Với mỗi số nguyên $n \geqslant 0$, đặt $u_n = \left(2+\sqrt{5}\right)^n + \left(2-\sqrt{5}\right)^n$.

a) Chứng minh rằng u_n là số nguyên dương với mọi $n \geqslant 0$. Khi n thay đổi, số dư của u_n khi chia cho 24 lớn nhất bằng bao nhiêu?

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (a, b) với a, b nhỏ hơn 500 sao cho với mọi n lẻ ta có $u_n \equiv a^n - b^n \pmod{1111}$.

Bài 3 (6 điểm). Cho tam giác nhọn không cân ABC nội tiếp đường tròn (O) và có trực tâm H. Đường thẳng AH cắt lại (O) tại điểm D khác A. Gọi E và F tương ứng là trung điểm các đoạn thẳng AB và AC. Đường thẳng đi qua H và vuông góc với HF cắt đường thẳng BC tại điểm K.

a) Đường thẳng DK cắt lại (O) tại điểm Y khác D. Chứng minh rằng giao điểm của đường thẳng BY và đường trung trực của đoạn thẳng BK nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác OFY.

b) Đường thẳng đi qua H và vuông góc với HE cắt đường thẳng BC tại điểm L. Đường thẳng DL cắt lại (O) tại điểm Z khác D. Gọi M, N, P tương ứng là giao điểm của các cặp đường thẳng (BZ, OE), (CY, OF) và (BY, CZ). Gọi T là giao điểm của cặp đường thẳng (YZ, MN) và d là đường thẳng đi qua T và vuông góc với OA. Chứng minh rằng d đi qua trung điểm của đoạn thẳng AP.

Ngày thi thứ hai

Bài 4 (7 điểm). Cho tam giác nhọn không cân ABC có các đường cao AD, BE, CF với $D \in BC$, $E \in CA$ và $F \in AB$. Gọi H, O và I tương ứng là trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp và tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC, M, N và P tương ứng là trung điểm các đoạn thẳng BC, CA và AB. Gọi X, Y và Z tương ứng là giao điểm của các cặp đường thẳng (AI, NP), (BI, PM) và (CI, MN).

a) Chứng minh rằng các đường tròn ngoại tiếp các tam giác AXD, BYE, CZF có hai điểm chung nằm trên đường thẳng OH.

b) Các đường thẳng XP, YM và ZN tương ứng cắt lại các đường tròn ngoại tiếp các tam giác AXD, BYE và CZF tại các điểm X', Y' và Z' ($X' \neq X$, $Y' \neq Y$, $Z' \neq Z$). Gọi J là điểm đối xứng của I qua O. Chứng minh rằng X', Y' và Z' cùng nằm trên một đường thẳng vuông góc với đường thẳng HJ.

Bài 5 (7 điểm). Cho một bảng ô vuông $3k \times 3k$ (k là số nguyên dương), các ô của bảng được đánh tọa độ theo cột và hàng: ô $(i; j)$ nằm trên cột thứ i từ trái qua phải và trên hàng thứ j từ dưới lên trên. Người ta muốn đặt $4k$ viên bi vào các ô của bảng, mỗi ô có không quá một viên, thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:

- Mỗi hàng và mỗi cột đều có ít nhất một viên bi;
- Mỗi viên bi nằm cùng hàng hoặc cùng cột với ít nhất một viên bi khác.

a) Xét $k = 1$. Có bao nhiêu cách đặt 4 viên bi vào bảng thỏa mãn các điều kiện trên? (Hai cách đặt bi được coi là khác nhau nếu có một ô $(i; j)$ có bi trong một cách đặt nhưng không có bi trong cách còn lại.)

a) Xét $k \geqslant 1$ tổng quát. Xác định số tự nhiên N lớn nhất sao cho với mọi cách đánh dấu N ô phân biệt trên bảng, luôn tồn tại một cách đặt $4k$ viên bi thỏa mãn các điều kiện trên mà không có viên bi nào đặt ở một trong N ô đã được đánh dấu.

Bài 6 (6 điểm). Cho a, b, c là các số thực không âm, thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{3a^2 + 4bc + b + c} + \sqrt{3b^2 + 4ca + c + a} + \sqrt{3c^2 + 4ab + a + b} \geqslant 9.$$

2. Lời giải

Bài 1 (7 điểm). *Xét đa thức* $P(x) = x^4 - x^3 + x$.

a) *Chứng minh rằng với mọi số dương* a, *đa thức* $P(x) - a$ *có duy nhất một nghiệm dương.*

b) *Xét dãy số* (a_n) *được xác định bởi* $a_1 = \frac{1}{3}$ *và với mọi* $n \geqslant 1$, a_{n+1} *là nghiệm dương của đa thức* $P(x) - a_n$. *Chứng minh rằng dãy* (a_n) *có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.*

LỜI GIẢI.
a) Ta có $P'(x) = 4x^3 - 3x^2 + 1$ nên với mỗi $x \geqslant 1$ thì

$$P'(x) \geqslant x^3 + 1 > 0,$$

và với mỗi $x \in [0, 1)$ thì

$$P'(x) \geqslant 4x^4 - 3x^2 + 1 = (2x^2 - 1)^2 + x^2 > 0.$$

Như vậy, $P'(x) > 0$ với mọi $x \geqslant 0$, tức là $P(x)$ là hàm tăng trên $[0, +\infty)$. Kết hợp điều này với việc $P(x)$ là đa thức có $P(0) = 0$, ta thấy với mỗi $a > 0$ thì phương trình $P(x) = a$ có đúng một nghiệm, hơn nữa nghiệm này phải là số dương vì $P(x) = a > 0 = P(0)$.

b) Ta có $a_1 = 1/3 \in (0, 1)$ và cứ hễ $a_n \in (0, 1)$ thì $P(a_{n+1}) = a_n \in (0, 1)$. Mà $P(0) = 0$, $P(1) = 1$ và $P(x)$ tăng trên $[0, +\infty)$ nên $0 < a_{n+1} < 1$. Vậy, $a_n \in (0, 1)$ với mọi n nguyên dương. Từ đó, $a_n - a_{n+1} = a_{n+1}^4 - a_{n+1}^3 < 0$, với mọi $n \geqslant 1$. Như vậy, (a_n) là dãy số thực dương tăng, bị chặn trên bởi 1, nên nó hội tụ về $L > 0$. Trong đẳng thức $P(a_{n+1}) = a_n$, cho $n \to +\infty$ ta được

$$L^4 - L^3 + L = L, \quad \text{hay } L^3(L - 1) = 0,$$

tức là $L = 1$ vì $L > 0$. Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$.

Bài 2 (7 điểm). *Với mỗi số nguyên* $n \geqslant 0$, *đặt* $u_n = \left(2 + \sqrt{5}\right)^n + \left(2 - \sqrt{5}\right)^n$.

a) *Chứng minh rằng* u_n *là số nguyên dương với mọi* $n \geqslant 0$. *Khi* n *thay đổi, số dư của* u_n *khi chia cho 24 lớn nhất bằng bao nhiêu?*

b) *Tìm tất cả các cặp số nguyên dương* (a, b) *với* a, b *nhỏ hơn 500 sao cho với mọi* n *lẻ ta có* $u_n \equiv a^n - b^n \pmod{1111}$.

LỜI GIẢI.
a) Với dãy (u_n) xác định ở trên, ta xác định được công thức truy hồi:

$$u_{n+2} = 4u_{n+1} + u_n, \forall n \geqslant 0. \tag{1}$$

Bảng số dư của dãy khi chia cho 24 với 10 số hạng đầu được cho như sau:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$u_n \pmod{24}$	2	4	18	4	10	20	18	20	2	4

Dựa vào bảng trên, ta nhận thấy $u_8 \equiv u_0$ và $u_9 \equiv u_1 \pmod{24}$. Từ đây, bằng quy nạp kết hợp với (1), ta chứng minh được rằng:

$$u_{n+8} \equiv u_n, \quad \forall n \geqslant 0.$$

Do đó, dãy $\{u_n \pmod{24}\}$ là tuần hoàn với chu kỳ 8. Vậy, số dư lớn nhất của u_n khi chia cho 24 là 20, cũng chính là số dư lớn nhất trong 8 số hạng đầu của dãy.

b) Xét phân tích của 1111 ra thừa số nguyên tố: $1111 = 101.11$
Ta có $5 \equiv 4^2 \pmod{11}$ và $5 \equiv 45^2 \pmod{101}$. Chọn $k = 348$ thì ta có ngay $k^2 \equiv 5 \pmod{1111}$. Xét dãy số $\{v_n\}_{n\geqslant 0}$ xác định bởi công thức tổng quát:

$$v_n = (2+k)^n + (2-k)^n.$$

Ta xác định được công thức truy hồi của dãy (v_n):

$$v_{n+2} = 4v_{n+1} + \left(k^2-4\right) v_n \equiv 4v_{n+1} + v_n \pmod{1111}. \tag{2}$$

Bởi vì $v_0 = u_0, v_1 = u_1$ kết hợp với (1) và (2) nên bằng quy nạp, ta dễ có $u_n \equiv v_n, \forall n \geqslant 0$. Vậy, ta đi tìm tất cả các bộ (a, b) với a, b nguyên dương nhỏ hơn 500 và

$$a^n - b^n \equiv (k+2)^n - (k-2)^n \pmod{1111} \text{ với mọi } n \text{ lẻ}. \tag{3}$$

Nhận xét. Điều kiện cần và đủ của bộ (a, b) để thỏa mãn bài toán là $a-b \equiv 4 \pmod{1111}$ và $ab \equiv k^2 - 4 \pmod{1111}$.

Chứng minh. Trong (3), cho $n = 1$ ta được $a - b \equiv 4 \pmod{1111}$. Tiếp theo, với $n = 3$, thay vào trên ta được

$$(a-b)^3 - 3ab(a-b) \equiv 4^3 - 12\left(k^2-4\right) \text{ nên } ab \equiv k^2 - 4 \pmod{1111}.$$

Ta chứng minh đây cũng là điều kiện đủ.

Với hai số thực x, y, ta luôn có đẳng thức:

$$x^{n+4} - y^{n+4} = \left(x^2+y^2\right)\left(x^{n+2} - y^{n+2}\right) - x^2y^2\left(x^n - y^n\right).$$

Với a, b thỏa mãn hai điều trên, để ý rằng

$$\begin{aligned} a^n - b^n &\equiv (k+2)^n - (k-2)^n \pmod{1111} \text{ với } n \in \{1, 3\} \\ ab &\equiv (k+2)(k-2) \pmod{1111} \\ a^2 + b^2 &\equiv (k+2)^2 + (k-2)^2 \pmod{1111} \end{aligned}$$

nên bằng quy nạp, ta cũng có $a^n - b^n \equiv v_n \pmod{1111}$, với mọi n lẻ.

Quay lại bài toán, bởi vì $a - b \equiv 4 \pmod{1111}$ nên $a = b + 4$. Khi đó,

$$b^2 + 4b \equiv k^2 - 4 \pmod{1111} \text{ hay } (b+2+k)(b+2-k) \equiv 0 \pmod{1111}.$$

Thay $k = 348$, ta giải ra được b có số dư khi chia cho 1111 thuộc tập $\{345, 357, 750, 761\}$. Bởi vì $a, b < 500$ nên ta thu được hai bộ số thỏa mãn: $(a, b) = (350, 346), (361, 357)$.

Nhận xét. Một khía cạnh quan trọng trong ý b), đồng thời để xử lý thành phần vô tỷ $\sqrt{5}$, là kiểm tra sự tồn tại của k sao cho $k^2 \equiv 5 \pmod{1111}$. Sử dụng luật tương hỗ bậc hai của Gauss, ta có:

$$\left(\frac{5}{101}\right) = \left(\frac{101}{5}\right) \cdot (-1)^{\frac{(5-1)(101-1)}{4}} = 1.$$

Điều này khẳng định rằng 5 là một thặng dư bình phương theo modulo 101. Kết hợp với $5 \equiv 4^2 \pmod{11}$, ta suy ra rằng tồn tại k thỏa mãn $k^2 \equiv 5 \pmod{1111}$.

Để xác định cụ thể giá trị của k, ta tìm a sao cho $a^2 \equiv 5 \pmod{101}$. Thử cho a là các lũy thừa của 5, ta đi xét số dư của 5^{25} (số 25 được chọn bởi vì là số lẻ và là ước của 100). Biết rằng $5^4 = 625 \equiv 19 \pmod{101}$, nên:

$$5^{25} = 5 \cdot (5^4)^6 \equiv 5 \cdot 19^6 \equiv 1 \pmod{101}.$$

Do đó, chọn $a = \pm 5^{13}$, ta có $a^2 \equiv 5 \pmod{101}$. Thay vào, tính 5^{13}:

$$5^{13} = 5 \cdot (5^4)^3 \equiv 5 \cdot 19^3 \equiv 56 \pmod{101}.$$

Suy ra, $a = \pm 56$ là giá trị thỏa mãn. Chọn $a = -56 = 45 \pmod{101}$, ta được cách chọn k như đã trình bày ở trên. Ngoài ra, ta có các bài toán tương tự sau

i) Cho dãy số $\{a_n\}$ thỏa mãn

$$\begin{cases} a_0 = 1, a_1 = -1 \\ a_n = 6a_{n-1} + 5a_{n-1}, \quad \forall n \geqslant 0. \end{cases}$$

Chứng minh rằng $a_{2011} - 2010 \;\vdots\; 2011$.

VMO 2011

ii) Cho k là số nguyên dương và dãy số $\{x_n\}$ thỏa

$$\begin{cases} x_0 = 1, x_1 = 3 \\ x_{n+2} = 6x_{n+1} - x_n, \quad \forall n \geqslant 0 \end{cases}.$$

Gọi p là ước nguyên tố lẻ của x_{2^k}. Chứng minh rằng

a) 2 là thặng dư chính phương mod p.

b) 2^{k+3} là ước của $p-1$.

Mở rộng đề chọn đội tuyển Chuyên Sư Phạm 2020

Bài 3 (6 điểm). *Cho tam giác nhọn không cân ABC nội tiếp đường tròn (O) và có trực tâm H. Đường thẳng AH cắt lại (O) tại điểm D khác A. Gọi E và F tương ứng là trung điểm các đoạn thẳng AB và AC. Đường thẳng đi qua H và vuông góc với HF cắt đường thẳng BC tại điểm K.*

a) Đường thẳng DK cắt lại (O) tại điểm Y khác D. Chứng minh rằng giao điểm của đường thẳng BY và đường trung trực của đoạn thẳng BK nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác OFY.

b) Đường thẳng đi qua H và vuông góc với HE cắt đường thẳng BC tại điểm L. Đường thẳng DL cắt lại (O) tại điểm Z khác D. Gọi M, N, P tương ứng là giao điểm của các cặp đường thẳng (BZ, OE), (CY, OF) và (BY, CZ). Gọi T là giao điểm của cặp đường thẳng (YZ, MN) và d là đường thẳng đi qua T và vuông góc với OA. Chứng minh rằng d đi qua trung điểm của đoạn thẳng AP.

Lời giải.

a) Gọi HK cắt AB tại K', HF cắt BC tại S. X là tâm đường tròn (BKK').

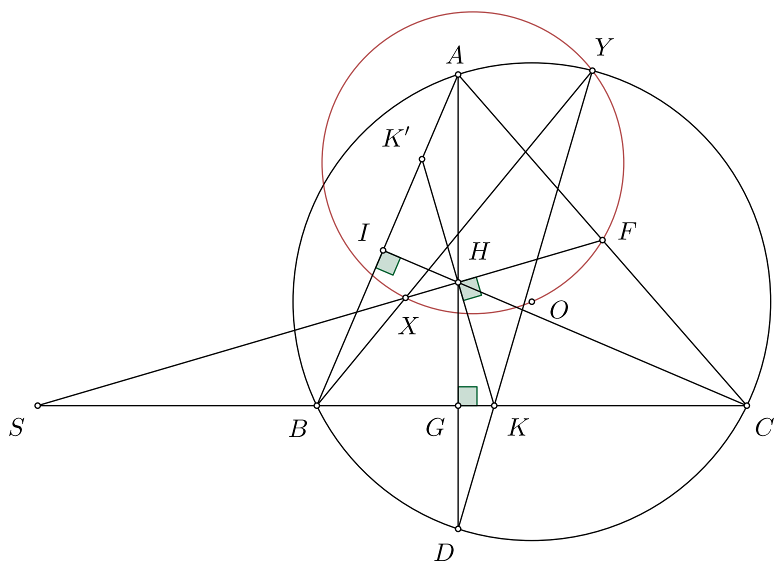
Dựng các đường cao AG, CI của tam giác ABC thì $ACGI$ nội tiếp (F) đường kính AC.

Áp dụng định lý con bướm trong (F), dây cung AG cắt CI tại H, $FH \perp KK'$ ta suy ra H là trung điểm KK', suy ra HF là trung trực KK', nên H, F, X, S thẳng hàng.

Ta dễ dàng có tam giác KDH cân tại K, nên

$$\widehat{ABY} = \widehat{ADY} = \frac{180^\circ - \widehat{HKD}}{2} = \frac{180^\circ - 2\widehat{HKG}}{2} = \frac{180^\circ - \widehat{BXK'}}{2} = \widehat{ABX},$$

suy ra B, X, Y thẳng hàng.



Từ đó, ta có

$$\begin{aligned}\widehat{YXF} = \widehat{BXS} = \widehat{YBC} - \widehat{XSB} &= (\widehat{ABC} - \widehat{ABY}) - (90^\circ - \widehat{HKS})\\ &= \frac{\widehat{AOC}}{2} - \widehat{ADY} - \widehat{KHD} = \widehat{AOF} - 2\widehat{ADY}\\ &= \widehat{AOF} - \widehat{AOY} = \widehat{YOF},\end{aligned}$$

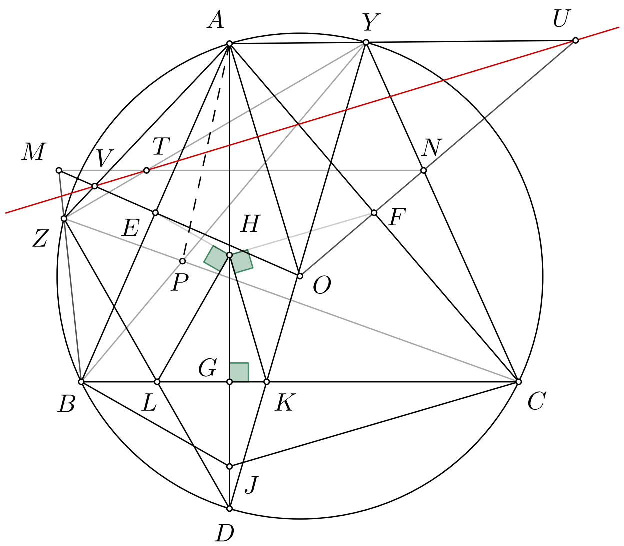
suy ra tứ giác $XOFY$ nội tiếp. Vậy BY cắt trung trực của đoạn BK tại X trên (OFY).

b) Gọi AY, AZ lần lượt cắt ON, OM tại U, V. J đối xứng với A qua H. Ta có bài toán được chứng minh thông qua 2 mệnh đề sau:

i) Đường thẳng UV và đường thẳng d trùng nhau.

ii) Đường thẳng UV chia đôi đoạn AP.

Chứng minh i). Vì H, F lần lượt là trung điểm AJ, AC nên $CJ \parallel FH$, suy ra $CJ \perp HK$.



Từ đó, ta có

$$\widehat{CJH} = 90^\circ - \widehat{KHD} = 90^\circ - \widehat{ADY} = \frac{180^\circ - 2\widehat{AOY}}{2} = \widehat{UAO}.$$

Mặt khác, ta có $\widehat{CHJ} = \widehat{UOA}$ $(= \widehat{B})$ suy ra $\Delta CHJ \sim \Delta UOA$ (g.g).

Tương tự, ta có $\Delta BHJ \sim \Delta VOA$ (g.g), suy ra $\Delta HBC \cup \{J\} \sim \Delta OVU \cup \{A\}$.

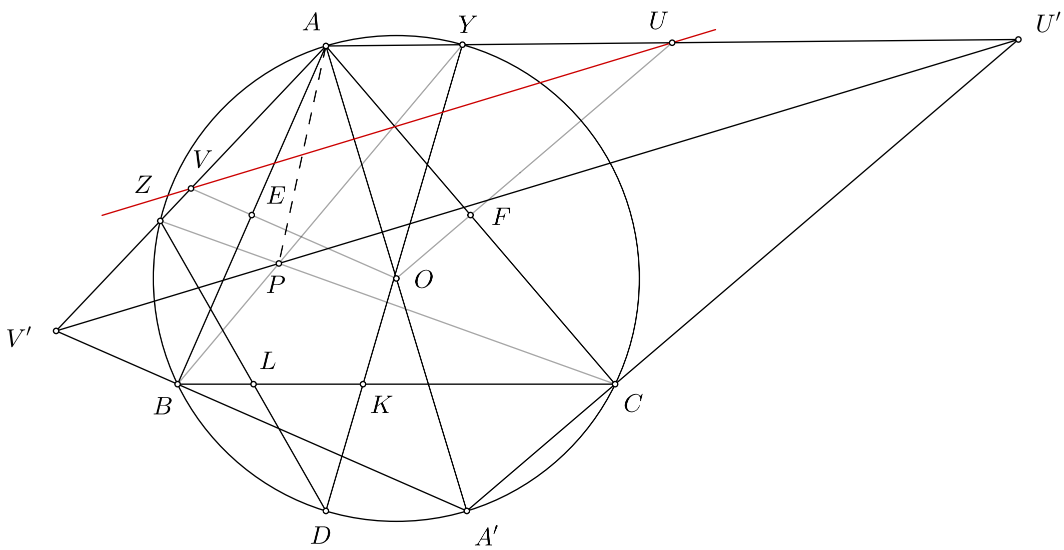
Mà $HJ \perp BC$, nên $OA \perp UV$. Mặt khác, ta có

$$\widehat{BCJ} = 90^\circ - \widehat{CJH} = \widehat{ADY} = \widehat{ACY}$$

nên CJ và CY đẳng giác trong $\widehat{C}$. Tương tự, có BJ và BZ đẳng giác trong $\widehat{B}$. Mà AJ (hay AH) và AO đẳng giác trong $\widehat{A}$. Suy ra AO, BZ, CY đồng quy tại điểm liên hợp đẳng giác với J trong tam giác ABC, hay AO, ZM, YN đồng quy. Áp dụng định lý Desargues với cặp tam giác AZY và OMN, ta suy ra U, V, T thẳng hàng.

Từ đây kết hợp với $OA \perp UV$, ta chứng minh được UV và d trùng nhau.

Chứng minh ii). Dựng A', U', V' đối xứng A qua O, U, V. Dễ có bộ các điểm A', B, V' và A', C, U' thẳng hàng.



Áp dụng định lý Pascal cho bộ 6 điểm

$$\begin{pmatrix} B & A & C \\ Z & A' & Y \end{pmatrix}$$

ta suy ra U', V', P thẳng hàng. Mà U, V là trung điểm AU', AV'.

Vậy UV chia đôi AP, bài toán được chứng minh.

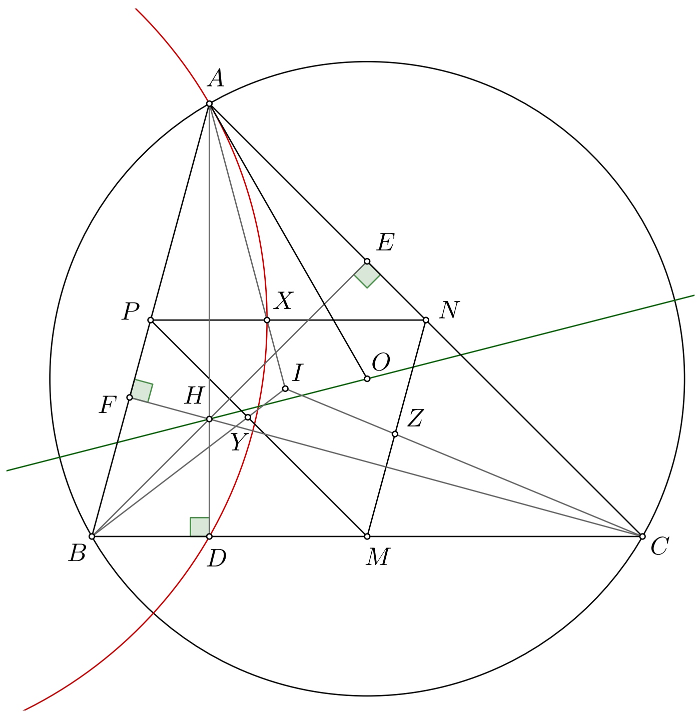
Bài 4 (7 điểm). *Cho tam giác nhọn không cân ABC có các đường cao AD, BE, CF với $D \in BC$, $E \in CA$ và $F \in AB$. Gọi H, O và I tương ứng là trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp và tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC, M, N và P tương ứng là trung điểm các đoạn thẳng BC, CA và AB. Gọi X, Y và Z tương ứng là giao điểm của các cặp đường thẳng (AI, NP), (BI, PM) và (CI, MN).*

a) Chứng minh rằng các đường tròn ngoại tiếp các tam giác AXD, BYE, CZF có hai điểm chung nằm trên đường thẳng OH.

b) Các đường thẳng XP, YM và ZN tương ứng cắt lại các đường tròn ngoại tiếp các tam giác AXD, BYE và CZF tại các điểm X', Y' và Z' ($X' \neq X$, $Y' \neq Y$, $Z' \neq Z$). Gọi J là điểm đối xứng của I qua O. Chứng minh rằng X', Y' và Z' cùng nằm trên một đường thẳng vuông góc với đường thẳng HJ.

Lời giải.

a) Gọi bán kính của đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC là R.



Vì AH và AO đẳng giác trong $\widehat{A}$ nên AI là phân giác của $\widehat{OAH}$. Mặt khác, NP đường là trung trực đoạn AD nên tam giác AXD cân tại X. Từ đó ta có

$$\widehat{XDA} = \widehat{DAX} = \widehat{HAI} = \widehat{OAI},$$

suy ra OA là tiếp tuyến tại A của (AXD), dẫn tới $\mathscr{P}_{O/(AXD)} = OA^2 = R^2$.

Tương tự, ta cũng chứng minh được

$$\mathscr{P}_{O/(AXD)} = \mathscr{P}_{O/(BYE)} = \mathscr{P}_{O/(CZF)} = R^2.$$

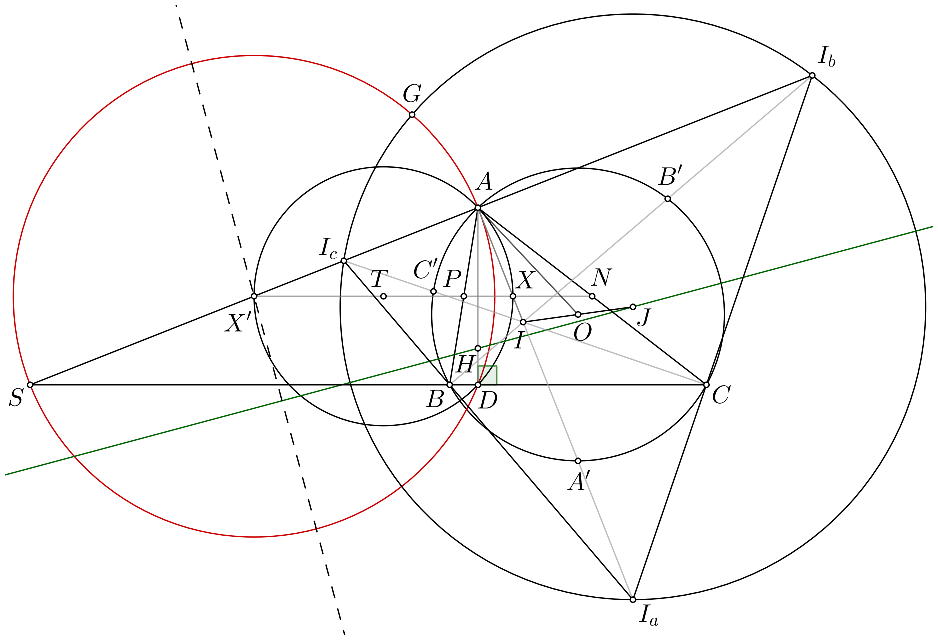
Lại có H là trực tâm của tam giác nhọn ABC, nên

$$\overline{HA} \cdot \overline{HD} = \overline{HB} \cdot \overline{HE} = \overline{HC} \cdot \overline{HF} = -HC \cdot HF < 0,$$

hay tức là $\mathscr{P}_{H/(AXD)} = \mathscr{P}_{H/(BYE)} = \mathscr{P}_{H/(CZF)} < 0$.

Từ đó ta thấy các đường tròn (AXD), (BYE), và (CZF) đồng trục OH, kết hợp $\mathscr{P}_{H/(AXD)} < 0$ ta kết luận được chúng có hai điểm chung nằm trên đường thẳng OH.

b) Gọi I_a, I_b, I_c tương ứng là các tâm bàng tiếp của tam giác ABC. A', B', C' lần lượt là trung điểm II_a, II_b, II_c. Khi đó, A', B', C' là trung điểm các cung $\widehat{BC}$, $\widehat{CA}$, $\widehat{AB}$.



Gọi T là tâm của (AXD), AX' cắt BC tại S. Hiển nhiên có X' là trung điểm AS.

Vì XX' (hay NP) là trung trực AD nên XX' đi qua T, nên XX' là đường kính (T). Suy ra $AX' \perp AX$, nên A, X', I_b, I_c, S thẳng hàng.

Xét phép vị tự tâm I tỉ số 2 tương ứng biến A', B', C', O thành I_a, I_b, I_c, J, và biến (O, R) thành $(J, 2R)$. Mà (O) ngoại tiếp tam giác $A'B'C'$, nên $(J, 2R)$ ngoại tiếp tam giác $I_aI_bI_c$. Gọi G là một trong hai giao điểm của $(X', X'A)$ và $(J, 2R)$.

Vì CI_c và CI_b lần lượt là phân giác trong và ngoài của $\widehat{ACS}$ nên

$$(ASI_bI_c) = C(ASI_bI_c) = -1,$$

mà X' là trung điểm AS nên $\overline{X'I_b}.\overline{X'I_c} = X'A^2 = X'G^2$, suy ra $X'G$ là tiếp tuyến tại G của $(J, 2R)$, nên $X'G \perp JG$. Từ đó suy ra JG là tiếp tuyến tại G của $(X', X'A)$, nên

$$\mathscr{P}_{J/(X',X'A)} = JG^2 = 4R^2.$$

Tương tự, ta cũng chứng minh được

$$\mathscr{P}_{J/(X',X'A)} = \mathscr{P}_{J/(Y',Y'B)} = \mathscr{P}_{J/(Z',Z'C)} = 4R^2.$$

Dễ dàng có $(X', X'A)$, $(Y', Y'B)$, $(Z', Z'C)$ lần lượt đi qua D, E, F, nên ta cũng có

$$\mathscr{P}_{H/(X',X'A)} = \mathscr{P}_{H/(Y',Y'B)} = \mathscr{P}_{H/(Z',Z'C)} \text{ (do } \overline{HA} \cdot \overline{HD} = \overline{HB} \cdot \overline{HE} = \overline{HC} \cdot \overline{HF}).$$

Từ hai điều trên suy ra $(X', X'A)$, $(Y', Y'B)$, $(Z', Z'C)$ đồng trục HJ, nên ta có X', Y' và Z' cùng nằm trên một đường thẳng vuông góc với đường thẳng HJ.

Bài 5 (7 điểm). *Cho một bảng ô vuông $3k \times 3k$ (k là số nguyên dương), các ô của bảng được đánh tọa độ theo cột và hàng: ô $(i; j)$ nằm trên cột thứ i từ trái qua phải và trên hàng thứ j từ dưới lên trên. Người ta muốn đặt $4k$ viên bi vào các ô của bảng, mỗi ô có không quá một viên, thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:*

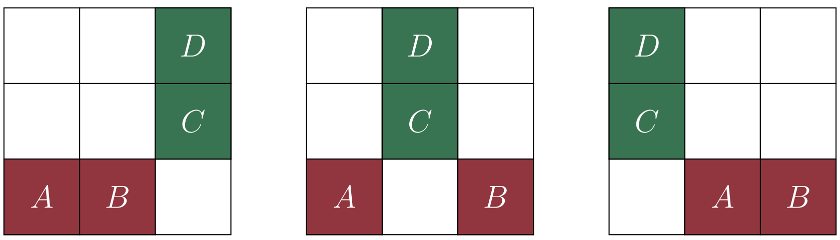
- *Mỗi hàng và mỗi cột đều có ít nhất một viên bi;*
- *Mỗi viên bi nằm cùng hàng hoặc cùng cột với ít nhất một viên bi khác.*

a) Xét $k = 1$. Có bao nhiêu cách đặt 4 viên bi vào bảng thỏa mãn các điều kiện trên? (Hai cách đặt bi được coi là khác nhau nếu có một ô $(i; j)$ có bi trong một cách đặt nhưng không có bi trong cách còn lại.)

b) Xét $k \geqslant 1$ tổng quát. Xác định số tự nhiên N lớn nhất sao cho với mọi cách đánh dấu N ô phân biệt trên bảng, luôn tồn tại một cách đặt $4k$ viên bi thỏa mãn các điều kiện trên mà không có viên bi nào đặt ở một trong N ô đã được đánh dấu.

Lời giải.

a) Trước hết, do trong 4 viên bi sẽ luôn có ít nhất hai viên bi nằm cùng một hàng hoặc cùng một cột, giả sử là A và B. Không mất tính tổng quát giả sử A, B cùng hàng nếu cùng cột thì ta có thể xoay bảng ô vuông một góc $90°$. Khi đó trong 9 ô còn lại sẽ có đúng hai ô không nằm cùng hàng hoặc cùng cột với A và B, giả sử là X và Y (Lưu ý X và Y sẽ nằm cùng cột do A và B cùng hàng).

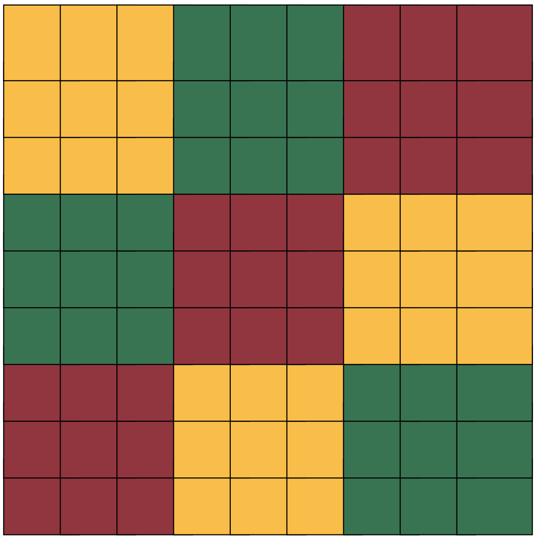


Điều này dẫn tới tồn tại ít nhất một viên bị nằm trong hai ô X và Y này, giả sử là C. Gọi viên bi cuối cùng chưa được điền là D, khi đó do C không nằm cùng hàng với A và B nên D phải nằm trên hàng còn lại. Cuối cùng, do C không nằm cùng hàng với A và B nên D phải nằm phải nằm cùng hàng hoặc cùng cột với C. Chú ý, C không nằm cùng hàng với D nên C, D phải cùng cột. Từ đó suy ra $\{C, D\} = \{X, Y\}$ hay với A, B cùng hàng hoặc cùng cột được xác định trước thì C, D xác định duy nhất.

Từ đó, ta quy bài toán về việc đếm số cặp ô nằm cùng hàng hoặc cùng cột. Ta có 3 hàng, 3 cột và với mỗi hàng hoặc mỗi cột có $C_3^2 = 3$ cách chọn hai ô bất kì. Vậy số cặp ô nằm cùng hàng hoặc cùng cột trên bảng 3×3 là $6 \cdot 3 = 18$. Chú ý, do vai trò của bộ $\{A, B\}$ và $\{C, D\}$ là như nhau nên đáp số của bài toán là 9.

b) *(Dựa trên lời giải của Nguyễn Nguyễn)* Ta sẽ chứng minh đáp số của bài toán là $N = 3k - 1$. Với $N = 3k$, ta đánh dấu tất cả các ô ở hàng đầu tiên, khi đó sẽ không có cách nào đặt được $4k$ viên bi thỏa mãn yêu cầu (do hàng một không có bất kì ô nào).

Với $N = 3k - 1$, ta chia bảng $3k \times 3k$ thành các thành k^2 khối 3×3. Ta phân k^2 khối này vào k tập hợp sao cho mỗi tập hợp có k khối và hai khối bất kỳ trong cùng một tập hợp khác hàng và khác cột của nhau. (Hình dưới đây minh họa cho $k = 3$, theo đường chéo)



Do $N = 3k - 1$ nên theo nguyên lý Dirchlet sẽ có một tập hợp trong k tập hợp này chỉ chứa tối đa 2 ô vuông được đánh dấu. Xét k khối có kích thước 3×3 trong tập hợp này, ta có thể đặt vào mỗi khối 4 viên bi sao cho

- Trong khối 3×3 sẽ có có tối đa hai ô được đánh dấu và những viên bi sẽ không được đặt vào những ô này.
- Mỗi hàng và mỗi cột sẽ chứa ít nhất 1 viên bi.
- Mỗi viên bi nằm cùng hàng hoặc cùng cột với ít nhất một viên bi khác.

Đây chính là bài toán trong trường hợp $k = 1$. Ta có thể dễ dàng giải quyết bài toán này dựa trên các cách điền thỏa mãn ở câu a) nên có được điều phải chứng minh.

Bài 6 (6 điểm). *Cho a, b, c là các số thực không âm, thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh:*

$$\sqrt{3a^2 + 4bc + b + c} + \sqrt{3b^2 + 4ca + c + a} + \sqrt{3c^2 + 4ab + a + b} \geqslant 9.$$

LỜI GIẢI.

Cách 1. Trước tiên, ta sẽ chứng minh bài toán phụ và cũng là bài toán gốc cho bài toán trong đề thi như sau.

Cho a, b, c là các số thực không âm, thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh

$$\sum \sqrt{a^3 + 2bc} \geqslant 3\sqrt{3}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Holder, ta có

$$\begin{aligned}
&\sum \sqrt{a^3+2bc}\sum \sqrt{a^3+2bc}\sum (a^2+2bc)(a+2b)\\
\geqslant\ &\left(\sum \sqrt[3]{(a^3+2bc)(a^2+2bc)(a+2b)}\right)^3\\
\geqslant\ &\left(\sum \sqrt[3]{(a^2+2bc)^3}\right)^3 = (a+b+c)^6 = 3^6.
\end{aligned}$$

Lúc này, ta cần chứng minh

$$\sum (a^2+2bc)(a+2b) \leqslant 27.$$

Khai triển và chứng minh, ta được

$$\sum a^3 + 2abc\cdot\sum a + 6abc + 4\sum b^2c^2 \leqslant 27.$$

Sử dụng biến đổi đại số, ta có

$$\sum a\sum a^3 + 12abc\sum a + 12\sum a^2b^2 \leqslant (a+b+c)^4.$$

Bất đẳng thức này tương đương

$$\sum a\sum a^3+12abc\sum a+12\sum a^2b^2 \leqslant \sum a\sum a^3+3\sum ab(a^2+b^2)+6\sum a^2b^2+12abc\sum a.$$

Điều này tương đương với

$$\sum ab(a-b)^2 \geqslant 0,\ \text{luôn đúng.}$$

Quay trở lại bài toán. Áp dụng bất đẳng thức cần chứng minh

$$\sum \sqrt{3a^2+4bc+b+c-a+3} \geqslant 9.$$

Vì $(a^2-1)(a-1) \geqslant 0$, ta suy ra $a^3-a+3 \geqslant a^2+2$. Do đó

$$VT = \sum \sqrt{3a^3+4bc-a+3} \geqslant \sum \sqrt{2a^3+4bc+a^2+2}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Minkopxki và bất đẳng thức phụ chứng minh trên, ta suy ra

$$VT \geqslant \sqrt{\left(\sum \sqrt{2a^3+4bc}\right)^2 + (a+b+c)^2 + (3\sqrt{2})^2} \geqslant \sqrt{54+9+18} = 9$$

Vậy

$$\sum \sqrt{3a^2+4bc+b+c} \geqslant 9.$$

Bài toán được chứng minh.

Cách 2. Cũng là cách chứng minh bất đẳng thức phụ, ta có thể làm tương tự như sau. Trước hết, theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có

$$(3a^3+4bc+b+c)(3a+4bc+b+c) \geqslant (3a^2+4bc+b+c)^2,$$

hay là

$$3a^3+4bc+b+c \geqslant \frac{(3a^2+4bc+b+c)^2}{3a+4bc+b+c} = \frac{(3a^2+4bc+b+c)^2}{2a+4bc+3}.$$

Do đó, suy ra được

$$VT \geqslant \sum \frac{3a^2 + 4bc + b + c}{\sqrt{2a + 4bc + 3}}.$$

Tiếp theo, sử dụng bất đẳng thức Holder để khử căn và mẫu, ta có

$$VT^2 \cdot \sum (2a + 4bc + 3)(3a^2 + 4bc + b + c) \geqslant \left(\sum (3a^2 + 4bc + b + c)\right)^3.$$

Do đó, quy về chứng minh

$$\left(\sum (3a^2 + 4bc + b + c)\right)^3 \geqslant 81 \sum (2a + 4bc + 3)(3a^2 + 4bc + b + c).$$

Đặt $q = ab + bc + ca$ và $r = abc$, khi đó

$$(a^2+b^2+c^2+24)^3 \geqslant 81\left(6\sum a^3+16\sum a^2b^2+18\sum a^2+16\sum ab+4\sum (a^2b+ab^2)+60abc\right),$$

$$\Leftrightarrow (33 - 2q)^3 \geqslant 81\big(6(27 - 9q + 3r) + 16(q^2 - 2r) + 18(9 - 2q) + 16q + 4(3q - 3r) + 60r\big),$$

$$\Leftrightarrow (33 - 2q)^3 \geqslant 81\big(16q^2 - 44q - 30r + 261\big).$$

Tiếp tục dùng bất đẳng thức Schur $9r \geqslant 12q - 27$, ta quy về chứng minh

$$(33 - 2q)^3 + 9 \cdot 30(12q - 27) \geqslant 81\big(16q^2 - 44q + 261\big),$$

hay tương đương:

$$(3 - q)(4q^2 + 462q + 1251) \geqslant 0.$$

Đánh giá cuối cùng đúng vì theo bất đẳng thức AM-GM ta có $q \leqslant 3$. Do đó, bài toán đã được giải quyết.