Hướng dẫn giải chi tiết

Đề minh họa của Sở GD&ĐT Hà Nội

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT THEO CHƯƠNG TRÌNH GDPT 2018

(Kèm thông báo số 2988/TB-SGDĐT, ngày 28/08/2024)

Môn: TOÁN

NGUYỄN KIM SỐ – HỘI TOÁN HỌC HÀ NỘI

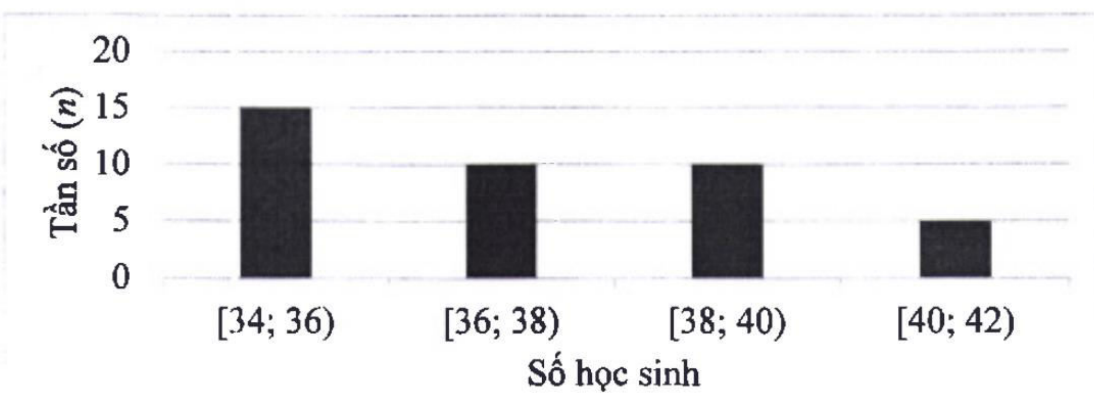
NGUYỄN KIM THÀNH – LỚP 10T2 – THPT CHUYÊN ĐHSP HÀ NỘI

Trung tâm Bồi dưỡng và Phát triển tài năng Toán học Nam Sáng – SMATH

Điện thoại: 093.464.1088 – Email: ceo@namsang.vn – Website: www.toanhocvietnam.vn

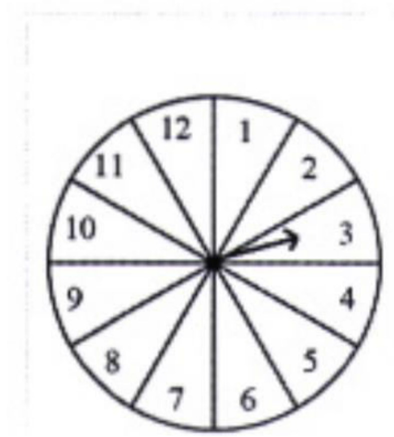
Bài I. (1.5 điểm)

1. Sau khi điều tra số học sinh trong 40 lớp học (đơn vị: học sinh) người ta có biểu đồ tần số ghép nhóm dưới đây:



Tìm tần số ghép nhóm và tần số tương đối ghép nhóm của nhóm [40; 42).

2. Hình vẽ dưới đây mô tả một đĩa tròn bằng bìa cứng được chia làm 12 phần bằng nhau và ghi các số 1, 2, 3, ..., 11, 12; chiếc kim dược gắn cố định vào trục quay ở tâm của đĩa.



Xét phép thử "Quay đĩa tròn một lần" và biến cố M: "Chiếc kim chỉ vào hình quạt ghi số chia hết cho 4". Tính xác suất của biến cố M.

Phân tích hướng giải và bình luận:

1. Từ biểu đồ tần số ghép nhóm ta lập được bảng tần số ghép nhóm:

Nhóm	Tần số (n)
[34; 36)	15
[36; 38)	10
[38; 40)	10
[40; 42)	5
Cộng	N = 40

Từ đây ta tính được:

* Tần số ghép nhóm của nhóm [40; 42) là: $n_4 = 5$.

* Tần số tương đối ghép nhóm của nhóm [40; 42) là: $f_4 = \frac{5}{40} \cdot 100\% = 12,5\%$.

Lưu ý: Học sinh cũng có thể tính trực tiếp mà không cần lập bảng tần số.

2. Xét phép thử "Quay đĩa tròn một lần". Ta thấy các kết quả xảy ra của phép thử đó là đồng khả năng. Tập hợp các kết quả có thể xảy ra với phép thử là:

$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12\}$. Số phần tử của tập Ω là 12.

Các kết quả thuận lợi cho biến cố M là: 4; 8; 12. Ta thấy có 3 kết quả thuận lợi cho biến cố này.

Khi đó $P(M) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}\cdot$

Vậy xác suất của biến cố "Chiếc kim chỉ vào hình quạt ghi số chia hết cho 4" là $\frac{1}{4}\cdot$

Lưu ý: Việc tính xác suất không khó, tuy nhiên đòi hỏi các em phải nắm thật vững lý thuyết trong sách giáo khoa và lý luận chặt chẽ, không nên trình bày vắn tắt lời giải.

Bài II. (1.5 điểm)

Cho hai biểu thức: $A = \frac{x-4}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{3}{\sqrt{x}-2} + \frac{2\sqrt{x}+3}{4-x}$ với $x > 0, x \neq 4$.

1. Tính giá trị của biểu thức A khi x = 9;

2. Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}+3}{x-4}$;

3. Xét biểu thức: P = AB. Chứng minh $P < P^2$.

Phân tích hướng giải và bình luận:

1. Thay x = 9 (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức A ta được:

$A = \frac{x-4}{\sqrt{x}} = \frac{9-4}{\sqrt{9}} = \frac{5}{3}\cdot$

Vậy $A = \frac{5}{3}$ khi x = 9.

2. Ta biến đổi: $B = \frac{3}{\sqrt{x}-2} + \frac{2\sqrt{x}+3}{4-x}$

$= \dfrac{3}{\sqrt{x}-2} - \dfrac{2\sqrt{x}+3}{x-4} = \dfrac{3}{\sqrt{x}-2} - \dfrac{2\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$

$= \dfrac{3(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} - \dfrac{2\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \dfrac{3(\sqrt{x}+2)-(2\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$

$= \dfrac{3\sqrt{x}+6-2\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \dfrac{\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \dfrac{\sqrt{x}+3}{x-4} \cdot$

Vậy $B = \dfrac{\sqrt{x}+3}{x-4} \cdot$

3. Ta có: $P = A.B = \dfrac{x-4}{\sqrt{x}} \cdot \dfrac{\sqrt{x}+3}{x-4} = \dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}} \cdot$

Sử dụng phương pháp chứng minh trực tiếp thông qua việc xét hiệu:

$P^2 - P = \left(\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}}\right)^2 - \dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}}$

$= \dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}}\left(\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}} - 1\right) = \dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}}\left(\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}} - \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)$

$= \dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}}\left(\dfrac{\sqrt{x}+3-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right) = \dfrac{3(\sqrt{x}+3)}{\sqrt{x}} \cdot$

Với $x > 0$ và $x \neq 4$ thì $\sqrt{x} > 0$ và $\sqrt{x} + 3 > 0$ nên $\dfrac{3(\sqrt{x}+3)}{\sqrt{x}} > 0$.

Do đó $P^2 - P > 0$ hay $P < P^2$. Bài toán được chứng minh.

Lưu ý:

Đây là dạng toán quen thuộc và tương đối dễ. Tuy nhiên học sinh phải làm thật cẩn trọng. Câu dễ cần cố gắng để đạt điểm tối đa.

– Khi thay x = 9, nhớ kèm “thỏa mãn điều kiện”.

– Sau mỗi ý nên viết câu kết luận.

– Không được quên gạch ngang của phân thức (rất nhiều học sinh viết hết cả tử và mẫu của toàn bộ bài làm rồi mới dùng thước kẻ gạch ngang nên đôi khi quên hoặc bị sót).

Bài III. (2.5 điểm)

1. Bác Tiến chia số tiền 400 triệu đồng của mình cho hai khoản đầu tư. Sau một năm, tổng số tiền lãi thu được là 27 triệu đồng. Lãi suất cho khoản đầu tư thứ nhất là 6% / năm và khoản đầu tư thứ hai là 8% / năm. Tính số tiền bác đã đầu tư cho mỗi khoản.

2. Một tổ sản xuất có kế hoạch làm 300 sản phẩm cùng loại trong một số ngày quy định. Thực tế, mỗi ngày tổ đã làm được nhiều hơn 10 sản phẩm so với số sản phẩm dự định làm trong một ngày theo kế hoạch. Vì thế tổ đã hoàn thành công việc sớm hơn kế hoạch 1 ngày. Hỏi theo kế hoạch, mỗi ngày tổ sản xuất phải làm bao nhiêu sản phẩm? (Giả định rằng số sản phẩm mà tổ đó làm được trong mỗi ngày là bằng nhau).

3. Biết rằng phương trình bậc hai $x^2 - 3x + a = 0$ có một nghiệm là $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. Tìm tổng bình phương hai nghiệm của phương trình trên.

Phân tích hướng giải và bình luận:

1. Gọi số tiền cho khoản đầu tư thứ nhất, thứ hai của bác Tiến lần lượt là x và y (triệu đồng).

Điều kiện $0 < x; y < 400$.

Theo bài ra thì:

Tổng số tiền của cả hai khoản đầu tư là 400 triệu đồng nên ta có phương trình:

$x + y = 400$.

Số tiền lãi của khoản đầu tư thứ nhất sau một năm là: $x.6\% = 0{,}06x$.

Số tiền lãi của khoản đầu tư thứ hai sau một năm là: $y.8\% = 0{,}08y$.

Sau một năm tổng số tiền lãi là 27 triệu đồng nên ta có phương trình:

$0{,}06x + 0{,}08y = 27$.

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = 400 & (1) \\ 0{,}06x + 0{,}08y = 27 & (2) \end{cases}$

Từ phương trình (1), ta có: $y = 400 - x$ (3).

Thế vào phương trình (2) ta được: $0{,}06x + 0{,}08(400 - x) = 27$ (4).

Giải phương trình (4):

0,06x + 0,08(400 – x) = 27

0,06x + 32 – 0,08x = 27

0,02x = 5

x = 250 (thỏa mãn điều kiện).

Thay x = 250 vào phương trình (3), ta được: y = 400 – 250 = 150 (thỏa mãn điều kiện).

Do đó, hệ phương trình có nghiệm duy nhất (x; y) = (250; 150).

Vậy số tiền bác Tiến đã đầu tư khoản thứ nhất 250 triệu đồng và khoản thứ hai là 150 triệu đồng.

Lưu ý:

* Học sinh cũng có thể giải hệ phương trình thu được theo cách sau:

(Tham khảo SGK Toán 9, Chân trời sáng tạo, tập 1, trang 16)

$$\begin{cases} x + y = 400 \\ 0.06x + 0.08y = 27 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 400 - x \\ 0.06x + 0.08y = 27 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 400 - x \\ 0{,}06x + 0{,}08(400 - x) = 27 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 400 - x \\ 0{,}06x + 32 - 0{,}08x = 27 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 400 - x \\ 0{,}02x = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 250 \\ y = 150 \end{cases} \text{(thỏa mãn điều kiện).}$$

Từ đây chúng ta kết luận tương tự như trên.

* Ngoài cách lập hệ phương trình, học sinh cũng có thể chỉ cần lập phương trình bậc nhất một ẩn số để giải bài toán này.

* Khi đã thiết lập được hệ phương trình hoặc phương trình các em có thể bấm máy tính để được kết quả chứ không cần nêu các bước giải chi tiết. Chẳng hạn như bài toán trên, từ bước:

...

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = 400 \\ 0{,}06x + 0{,}08y = 27 \end{cases}$

Giải hệ phương trình này ta được $\begin{cases} x = 250 \\ y = 150 \end{cases}$ *(thỏa mãn điều kiện).*

Vậy số tiền bác Tiến đã đầu tư khoản thứ nhất 250 triệu đồng và khoản thứ hai là 150 triệu đồng.

2. Gọi số sản phẩm tổ sản xuất dự định làm trong một ngày theo kết hoạch là x (sản phẩm).

Điều kiện : $x < 300$; $x \in \mathbb{N}^*$.

Khi đó, số ngày dự kiến để hoàn thành công việc là: $\frac{300}{x}$.

Do mỗi ngày tổ đã làm được nhiều hơn 10 sản phẩm (so với số sản phẩm dự định làm trong một ngày theo kế hoạch) nên số sản phẩm thực tế mỗi ngày tổ làm được là: $x + 10$.

Số ngày hoàn thành công việc thực tế sẽ là: $\frac{300}{x+10}$.

Vì tổ sản xuất đã hoàn thành công việc sớm hơn kế hoạch 1 ngày nên ta có phương trình: $\frac{300}{x} - \frac{300}{x+10} = 1$.

Giải phương trình trên với $x \in \mathbb{N}^*$, ta có:

$$\frac{300(x+10)}{x(x+10)} - \frac{300x}{x(x+10)} = 1$$

$$\frac{300(x+10) - 300x}{x(x+10)} = 1$$

$$\frac{3000}{x(x+10)} = 1$$

$$x^2 + 10x - 3000 = 0$$

$$(x - 50)(x + 60) = 0$$

x = 50 (thỏa mãn điều kiện) hoặc x = –60 (loại).

Vậy theo kế hoạch, mỗi ngày tổ sản xuất phải làm 50 sản phẩm.

Lưu ý:

Học sinh cũng có thể lập hệ phương trình để giải bài toán này.

3. Vì $x_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ là một nghiệm của phương trình nên chắc chắn phương trình sẽ còn một nghiệm x_2 nữa. Theo định lý Viète thì:

$x_1 + x_2 = 3$ suy ra $x_2 = 3 - x_1 = 3 - \frac{3-\sqrt{5}}{2} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Khi đó:

$A = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$

$= \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} + \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - 2\frac{3-\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{2} = 9 - 2 = 7.$

Vậy giá trị tổng bình phương hai nghiệm của phương trình đã cho là 7.

Ngoài ra các em cũng có thể tìm tham số a và giải bài toán theo một cách khác như sau:

Vì $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ là nghiệm của phương trình nên:

$$\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{3-\sqrt{5}}{2} + a = 0$$

$$a = 3 \cdot \frac{3-\sqrt{5}}{2} - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{9-3\sqrt{5}}{2} - \frac{14-6\sqrt{5}}{4} = \frac{9-3\sqrt{5}-7+3\sqrt{5}}{2} = 1.$$

Theo định lý Viète thì $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$

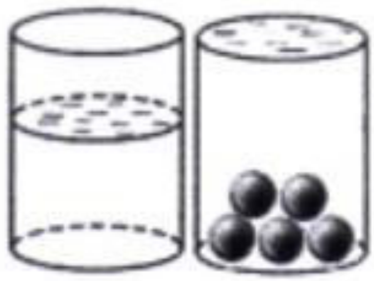
Do đó:

$A = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 32 - 2 = 7.$

Ta cũng thu được kết quả như trên.

Bài IV. (4,0 điểm)

1. Một ly nước dạng hình trụ có chiều cao là 15cm, đường kính đáy là 5cm, lượng nước tinh khiết trong ly cao 10cm. Ly nước được đặt cố định trên mặt bàn bằng phẳng như hình vẽ dưới đây.



Tính thể tích lượng nước tinh khiết được chứa trong ly.

2. Người ta thả vào ly nước 5 viên bi hình cầu giống hệt nhau, có cùng thể tích, đồng chất và ngập hoàn toàn trong nước, làm nước trong ly dâng lên đúng bằng miệng ly, không tràn ra ngoài. Hỏi thể tích của mỗi viên bi là bao nhiêu xăng ti mét khối? (Giả sử độ dày của ly là không đáng kể).

3. Cho đường tròn (O) có hai đường kính AB và MN vuông góc với nhau. Trên tia đối của tia MA lấy điểm C khác điểm M. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ điểm M đến đường thẳng BC.

a. Chứng minh bốn điểm O, M, H, B cùng thuộc một đường tròn.

b. Hai đường thẳng MB và OH cắt nhau tại E. Chứng Minh $\widehat{MHO} = \widehat{MNA}$ và ME.MH = BE.HC.

c. Gọi P là giao điểm thứ hai của đường tròn (O) và đường tròn ngoại tiếp tam giác MHC. Chứng minh ba điểm C, P, E là ba điểm thẳng hàng.

Phân tích hướng giải và bình luận:

1. Bán kính đáy của ly nước là: $r = \frac{5}{2} = 2{,}5$ (cm).

Chiều cao lượng nước trong ly: $h_1 = 10$ (cm).

Thể tích lượng nước tinh khiết được chứa trong ly là:

$V_1 = \pi r^2 h_1 = \pi.2{,}5^2.10 = 62{,}5\pi$ (cm^3).

Vậy thể tích lượng nước tinh khiết được chứa trong ly là 62,5π cm^3.

2. Thể tích của toàn bộ ly nước là:

$V = \pi r^2 h = \pi.2{,}5^2.15 = 93{,}75\pi$ (cm^3).

Nước dâng lên chính là do các viên bi thả vào chiếm chỗ. Vì vậy tổng thể tích của năm viên bi là:

$V_2 = V - V_1 = 31{,}25\pi$ (cm^3).

Do đó thể tích của mỗi viên bi là: $V_b = \frac{31{,}25\pi}{5} = 6{,}25\pi$ (cm^3).

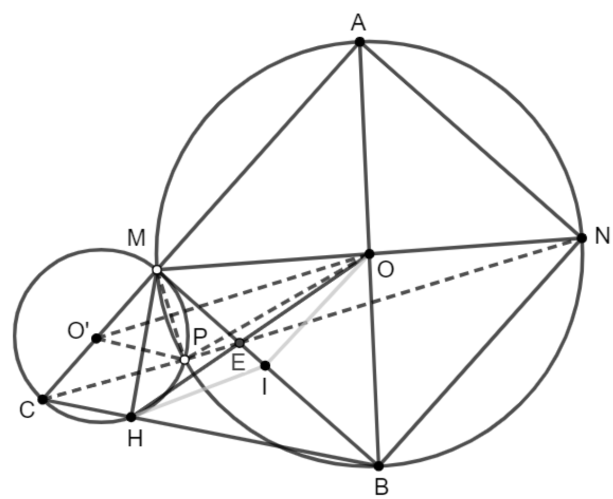
Vậy thể tích mỗi viên bi là 6,25π cm^3.

3. *Trong bài này chúng tôi chỉ dùng ký hiệu "⇒" ở phần suy luận ngược để tìm hướng giải cho ý cuối. Thực tế khi trình bày các em sẽ bỏ phần này đi.*

a. Theo bài ra $MN \perp AB$ và $MH \perp BC$ nên các tam giác MOB và MHB là các tam giác vuông.

Gọi I là trung điểm của MB, khi đó OI và HI lần lượt là trung tuyến trong các tam giác vuông MOB, MHB nên $IO = IH = IM = IB = \frac{MB}{2}$.

Suy ra: Bốn điểm O, M, H, B cùng thuộc một đường tròn tâm I đường kính MB.



Lưu ý:

* Các em không nên sử dụng dấu hiệu trước đây "*tổng hai góc đối trong một tứ giác bằng 180⁰ thì tứ giác đó nội tiếp đường tròn*" để chứng minh ý này.

* Học sinh cũng có thể sử dụng "*Cách xác định tâm và bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông*" như đã đề cập trong trang 70 – SGK Cánh Diều, lớp 9, tập 2 để giải ý này.

b. Theo kết quả phần trên ta thấy tứ giác OMHB là tứ giác nội tiếp.

Do đó: $\widehat{MHO} = \widehat{MBO}$ (cùng chắn cung MO) (1)

$= \widehat{ABM}$.

mà $\widehat{ABM} = \widehat{MNA}$ (cùng chắn cung AM).

Suy ra: $\widehat{MHO} = \widehat{MNA}$.

Mặt khác:

$\widehat{OMB} = \widehat{OHB}$ (cùng chắn cung OB) (2).

Tam giác OMB vuông cân nên $\widehat{OMB} = \widehat{OBM}$, kết hợp với (1) và (2) ta được:

$\widehat{MHO} = \widehat{OHB}$ hay HE là phân giác của góc MHB.

Sử dụng tính chất của đường phân giác ta có: $\frac{ME}{EB} = \frac{MH}{HB}$ (3).

Tứ giác AMBN là hình vuông nên $\widehat{AMB} = 90^0$, suy ra $\widehat{BMC} = 90^0$ hay tam giác CMB vuông tại M. Khi đó:

$\widehat{CMH} + \widehat{HMB} = 90^0$ và $\widehat{MBH} + \widehat{HMB} = 90^0$ nên $\widehat{CMH} = \widehat{MBH}$.

Do vậy hai tam giác vuông CMH và MHB đồng dạng.

Suy ra: $\frac{MH}{HB} = \frac{CH}{MH}$ (4).

Từ (3) và (4) rút ra: $\frac{ME}{EB} = \frac{CH}{MH}$ hay ME.MH = BE.HC.

Đến đây vấn đề được chứng minh.

Lưu ý:

Học sinh không cần chứng minh lại tính chất "Trong một đường tròn, hai góc nội tiếp cùng chắn một cung thì bằng nhau" bởi đã được nêu trong nhận xét trang 116 – SGK Cánh Diều, lớp 9, tập 2.

c. Có nhiều cách khác nhau để giải quyết ý này nhưng trước hết chúng ta cần phân tích xem hướng đi như thế nào. Mặc dù đang cần đi chứng minh nhưng các em hãy đặt mình vào cái sự "đã rồi" theo nghĩa C, P, E thẳng hàng. Vì tam giác MHC vuông nên đường tròn ngoại tiếp nó nhận CM là đường kính ⇒ $\widehat{MPC} = 90^0$, MN là đường kính của (O) nên $\widehat{MPN} = 90^0$ ⇒ C, P, N thẳng hàng ⇒ C, E, N thẳng hàng. Để ý thêm CN // MB (cùng vuông góc với MB) nên $\Delta CME \backsim \Delta NBE \Rightarrow \frac{ME}{BE} = \frac{CM}{NB}$. Theo (3) thì : $\frac{ME}{EB} = \frac{MH}{HB} \Rightarrow \frac{CM}{NB} = \frac{MH}{HB}$ hay $\frac{CM}{MB} = \frac{MH}{HB}$. Đây là tỉ số đồng dạng quen thuộc mà học sinh hay gặp khi xử lý các bài toán liên quan đến đường cao trong một tam giác vuông.

Tóm lại mấu chốt của vấn đề là sử dụng một phần kết quả của ý b. để chỉ ra ba điểm C, E, N thẳng hàng. Bây giờ chúng ta sẽ dựa trên phân tích trên để lần ngược lại cho lời giải của bài toán:

Từ (3) ta có: $\frac{ME}{EB} = \frac{MH}{HB}$.

Dễ nhận thấy hai tam giác vuông HMB và MCB đồng dạng (ví có góc nhọn B chung).

Khi đó: $\frac{MH}{HB} = \frac{CM}{MB}$.

Suy ra: $\frac{ME}{EB} = \frac{CM}{MB}$.

Đế ý rằng tứ giác AMBN là hình vuông nên MB = BN, do đó:

$\frac{ME}{EB} = \frac{CM}{MB} = \frac{CM}{BN}$ hay $\frac{ME}{EB} = \frac{CM}{BN}$ suy ra hai tam giác vuông CME và NBE đồng dạng (c–g–c).

Suy ra $\widehat{MEC} = \widehat{BEN}$ (hai góc tương ứng).

Khi đó: $\widehat{CEB} + \widehat{BEN} = \widehat{CEB} + \widehat{MEC} = 180^0$ nên ba điểm C, E, N thẳng hàng (5).

Mặt khác:

$\widehat{MPC} = \widehat{MHC} = 90^0$ (cùng chắn cung AM) hay $MP \perp PC$.

M nằm trên đường tròn tâm O đường kính MN nên $\widehat{MPN} = 90^0$ hay hay $MP \perp PN$. Suy ra: ba điểm C, P, N thẳng hàng (6).

Từ (5) và (6) ta thấy P, E cùng nằm trên CN hay ba điểm C, P, E thẳng hàng.

Bài toán được chứng minh hoàn chỉnh.

Trong trường hợp yêu thích tỉ lệ thức, các em cũng có thể chứng minh ba điểm C, E, N thẳng hàng theo một cách khác:

Từ chỗ $\frac{ME}{EB} = \frac{CM}{MB}$, sử dụng tính chất của tỉ lệ thức ta được

$\frac{ME}{ME + EB} = \frac{CM}{CM + MB}$ hay $\frac{ME}{MB} = \frac{CM}{CM + MB}$.

Để ý rằng MB = AN và MB = AM nên: $\frac{ME}{AN} = \frac{CM}{CM + MA} = \frac{CM}{CA}$.

Suy ra: Hai tam giác vuông CME và CAN đồng dạng.

Do đó: $\widehat{MCE} = \widehat{ACN}$ hay ba điểm C, E, N thẳng hàng.

Đến đây chúng ta làm tiếp tục như trên để chỉ ra C, P, N thẳng hàng từ đó có được C, P, E thẳng hàng.

Hoặc có thể chuyển hướng thông qua việc chứng minh vuông góc (tuy dài hơn nhưng các em thu được thêm một vài kết quả để có thể sử dụng lại khi gặp những bài toán khác) sau khi chỉ ra ba điểm C, E, N thẳng hàng:

Tam giác MHC vuông tại H nên đường tròn ngoại tiếp tam giác này có tâm O' là trung điểm của MC và bán kính $\frac{MC}{2}$.

Xét hai tam giác OMO' và OPO' có $\begin{cases} OM = OP \\ O'M = O'P \\ OO' \text{chung} \end{cases}$ nên ΔOMO' = ΔOPO'.

Suy ra: $\widehat{MOO'} = \widehat{POO'}$ (hai góc tương ứng) nghĩa là OO' là phân giác của góc MOP.

Mà tam giác MOP cân tại O nên OO' cũng là đường trung trực của MP hay OO' ⊥ MP.

Hơn thế: OO' là đường trung bình trong tam giác MCN nên OO' // CN.

Do vậy:

CN ⊥ MP hay CE ⊥ MP (7).

Mặt khác: $\widehat{MPC} = \widehat{MHC}$ (cùng chắn cung MC)

$= 90^0$ hay CP ⊥ MP (8).

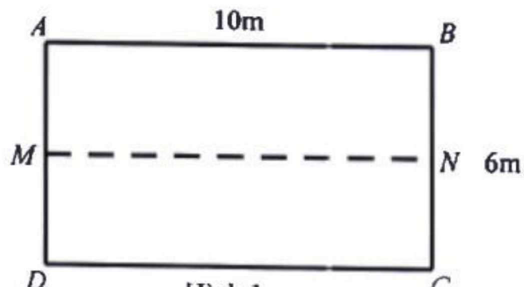
Từ (7) và (8) suy ra: ba điểm C, P, E thẳng hàng.

Nhận xét:

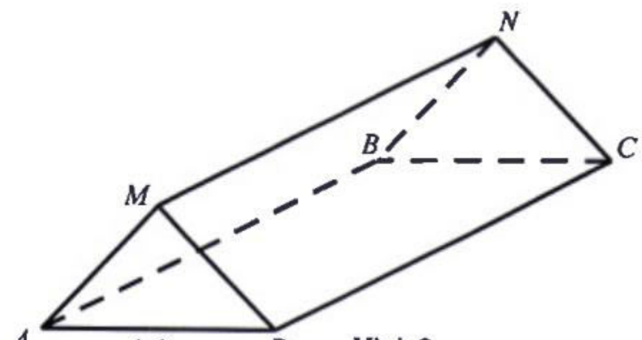
Nếu ý b. thay vì yêu cầu chứng minh ME.MH = BE.HC bởi ME.MB = BE.MC thì các ý sẽ gần gũi và học sinh đi tìm lời giải cũng dễ dàng hơn.

Bài V. (0,5 điểm)

Trong buổi tham quan dã ngoại cuối năm, mỗi khối lớp 9 được dùng một tấm bạt hình chữ nhật ABCD cùng loại, có chiều dài 10m, chiều rộng 6m; với M, N là trung điểm các cạnh AD, BC (hình 1).



Hình 1



Hình 2

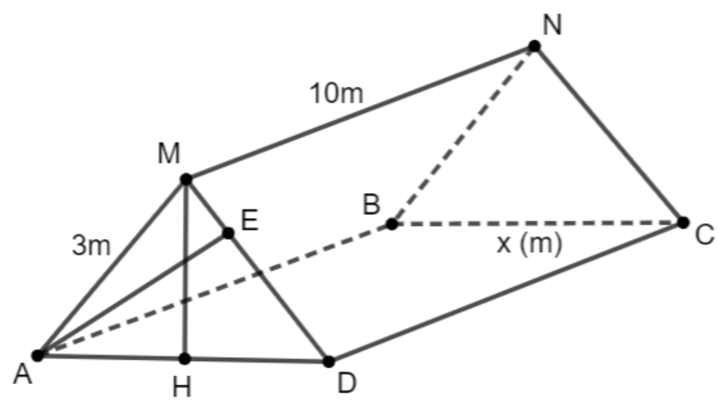
Mỗi lớp sử dụng tấm bạt như trên để dựng thành chiếc lều có dạng hình lăng trụ đứng tam giác (hình 2); hai đáy hình lăng trụ là hai tam giác cân: tam giác ADM và tam giác BNC, với độ dài cạnh đáy của hai tam giác cân là x(m). (Tấm bạt chỉ dùng để dựng thành mái lều, không trải thành đáy lều). Tìm x để thể tích không gian trong lều là lớn nhất.

Phân tích hướng giải và bình luận:

Theo bất đẳng thức tam giác thì 0 < AD < AM + MD hay 0 < x < 6.

Vì M là trung điểm của AD (hình 1) nên MA = MB = $\frac{6}{2} = 3$ (m).

Gọi H là hình chiếu vuông góc của M lên AD như hình bên. Do tam giác MAD cân tại M nên MH cũng là đường trung tuyến, nghĩa là H là trung điểm của AD và AH = $\frac{x}{2}$.



Sử dụng định lý Pythagore với tam giác vuông HMA ta có:

$HM^2 + HA^2 = MA^2$

$HM^2 = MA^2 - HA^2 = 9 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 9 - \frac{x^2}{4}$.

Suy ra: HM = $\sqrt{9 - \frac{x^2}{4}}$.

Diện tích đáy MAD của hình lăng trụ là:

$S_{MAD} = \frac{1}{2}AD.MH = \frac{1}{2}x.\sqrt{9 - \frac{x^2}{4}}$.

Khi đó thể tích của hình lăng trụ xác định bởi:

$V_{MAB.NBC} = S_{MAD} \cdot MN$

$= \frac{1}{2}.10x\sqrt{9 - \frac{x^2}{4}} = 5x\sqrt{9 - \frac{x^2}{4}}$

$= 5x\sqrt{9 - \frac{x^2}{4}} = 5\sqrt{9x^2 - \frac{x^4}{4}}$

$= 5\sqrt{81 - \left[\left(\frac{x^2}{2}\right)^2 - 2.9\frac{x^2}{2} + 81\right]} = 5\sqrt{81 - \left(\frac{x^2}{2} - 9\right)^2}$.

Vì $\left(\frac{x^2}{2} - 9\right)^2 \geq 0$ nên $81 - \left(\frac{x^2}{2} - 9\right)^2 \leq 81$. Suy ra:

$V_{MAB.NBC} \leq 5\sqrt{81}$ hay $V_{MAB.NBC} \leq 45$.

Dấu "=" xảy ra khi:

$\frac{x^2}{2} - 9 = 0$ hay $x^2 = 18$

$x = 3\sqrt{2}$ (thỏa mãn) hoặc $x = -3\sqrt{2}$ (loại).

Vậy kết luận: Khi $x = 3\sqrt{2}$ (m) thì thể tích không gian trong lều lớn nhất và giá trị lớn nhất tương ứng là 45 m^3.

Ngoài ra các em cũng có thể sử dụng bất đẳng thức cơ bản để giải quyết bài toán trên như sau:

Với mọi số thực a; b thì $(a - b)^2 \geq 0$ suy ra: $a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$

$a^2 + b^2 \geq 2ab$ hay $ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$. Dấu "=" xảy ra khi a = b.

Áp dụng vào bài toán, ta có:

$V_{MAB.NBC} = S_{MAD} \cdot MN$

$= \frac{1}{2}.10x\sqrt{9-\frac{x^2}{4}} = 10\frac{x}{2}\sqrt{9-\frac{x^2}{4}} \leq 10\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\sqrt{9-\frac{x^2}{4}}\right)^2}{2} = 10\cdot\frac{\frac{x^2}{4}+9-\frac{x^2}{4}}{2} = 45.$

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{x}{2} = \sqrt{9-\frac{x^2}{4}}$, giải phương trình này với điều kiện x > 0 ta cũng thu được $x = 3\sqrt{2}$ như trên.

Với bài toán này, học sinh còn có thể giải theo cách đơn giản hơn nữa như sau:

$V_{MAB.NBC} = S_{MAD} \cdot MN = 10.S_{MAD}$

Để $V_{MAB.NBC}$ đạt giá trị lớn nhất thì S_{MAD} phải lớn nhất.

Gọi E là hình chiếu vuông góc của A lên MD, khi đó:

$S_{MAD} = \frac{1}{2}AE.MD = \frac{3}{2}AE \leq \frac{3}{2}AM = \frac{9}{2}\cdot$

Suy ra $V_{MAB.NBC} = 10.S_{MAD} \leq 10\cdot\frac{9}{2} = 45.$

Dấu "=" xảy ra khi $AM \perp MD$, sử dụng định lý Pythagoras ta được:

$AD^2 = MA^2 + MD^2 = 18 \Rightarrow AD = 3\sqrt{2}$ hay $x = 3\sqrt{2}$.

Tuy nhiên chúng tôi vẫn khuyên các bạn ưu tiên cách đọc hiểu và là chuyển từ bài toán thực tế sang mô hình toán học như hai cách đầu tiên.

Nhận xét:

* Bài toán mang tính thực tế nhưng việc dựng lều với cạnh đáy $3\sqrt{2}$ có thể "thực tế" lại không đơn giản với nhiều học sinh.

* Trong quá trình giải phương trình, hệ phương trình các em không nên dùng dấu "⇔" và hạn chế dấu "⇒". Thậm chí nếu vốn từ vựng khá, khả năng diễn đạt tốt và hiểu chắc chắn vấn đề thì học sinh hoàn toàn không cần sử dụng đến các ký hiệu này trong bài thi.

Nhân đây cũng xin nói thêm rằng: Hiện nay có rất nhiều ý kiến trái chiều về việc có sử dụng hay không các ký hiệu "suy ra (⇒)" hay "tương đương (⇔)". Thậm chí nếu sách dùng ký hiệu đó sẽ được cho là sách viết theo chương trình cũ! Có thể thấy rằng không chỉ giáo trình, các sách toán giáo khoa, tài liệu tham khảo về toán thông thường khi viết cho học sinh THCS các tác giả nhiều khi không sử dụng các ký hiệu này.

Tại sao thì cũng có nguyên nhân, kể cả hình thức, chuyên môn lẫn tính hài hước. Nhưng điều đó không đồng nghĩa với việc chúng ta không được dùng, chỉ là không nên lạm dụng vì việc lạm dụng dùng nhiều ký hiệu có thể dẫn tới gây khó hiểu, khó chịu với học sinh và cả giáo viên. Không khó khăn gì khi thay ký hiệu bởi các từ như: nên, do đó, như vậy… hoặc ngược lại. Quan trọng là làm sao cho các em hiểu đúng và dùng đúng lúc, đúng chỗ để lời giải trở nên hài hòa, mềm mại và khoa học. Mang lại vẻ đẹp cho bài toán chứ không khô khan cứng nhắc như nhiều người vẫn nghĩ về bộ môn này.

----- CHÚC CÁC EM HỌC VÀ THI ĐẠT KẾT QUẢ TỐT! ------