MỘT SỐ ĐIỂM HỌC SINH CẦN LƯU Ý

VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 MÔN TOÁN CỦA THÀNH PHỐ HÀ NỘI NĂM HỌC 2024–2025

NGUYỄN KIM SỔ - HỘI TOÁN HỌC HÀ NỘI

Trung tâm Bồi dưỡng và Phát triển tài năng Toán học Nam Sáng – SMATH

Điện thoại: 024.6680.9640 – Email: ceo@namsang.vn – Website: www.toanhocvietnam.vn

PHẦN I. ĐỀ BÀI

Câu I. *(2.0 điểm)*

Cho hai biểu thức $A = \frac{x}{\sqrt{x} - 3}$ và $B = \frac{2x - 3}{x - 3\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ với $x > 0, x \neq 9$.

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 16$.

2) Chứng minh $B = \frac{2\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 3}$

3) Tìm tất cả giá trị của x để $A - B < 0$

Câu II. *(2.0 điểm)*

1) Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình: Để chở 15 tấn thiết bị phục vụ Lễ kỷ niệm 70 năm chiến thắng Điện Biên Phủ, một đội vận chuyển dự định sử dụng các xe tải loại nhỏ. Do thay đổi kế hoạch, đội vận chuyển quyết định chỉ sử dụng các xe tải loại lớn. vì vậy, số xe tải sử dụng giảm đi 2 xe so với dự định và mỗi xe tải loại lớn chở nhiều hơn xe tải loại nhỏ là 2 tấn. Hỏi đội vận chuyển sử dụng bao nhiêu xe tải loại lớn? (Biết mỗi xe tải cùng loại đề chở số tấn thiết bị bằng nhau).

2) Một bình đựng nước có dạng hình trụ với bán kính đáy là 4 cm và chiều cao là 25 cm. Tính diện tích xung quanh của bình đựng nước đó (lấy π xấp xỉ bằng 3.14)

Câu III. *(2.5 điểm)*

1) Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{3x + 1} + 2y = 4 \\ 3\sqrt{3x + 1} - y = 5 \end{cases}$

2) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = (m - 2)x + 5$ (m là tham số).

a) Chứng minh rằng (d) luôn cắt (P) tại 2 điểm phân biệt.

b) Gọi x_1, x_2 là hoành độ các giao điểm của (d) và (P).

Tìm tất cả các giá trị của m để $x_1 + 5x_2 = 0$.

Câu IV. *(3.0 điểm)*

Từ điểm A nằm bên ngoài đường tròn (O), kẻ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (O) (B, C là hai tiếp điểm).

1. Chứng minh tứ giác ABOC là tứ giác nội tiếp.

2. Vẽ đường kính BD của đường tròn (O). Gọi E là giao điểm thứ hai của đường thẳng AD và đường tròn (O). Đường thẳng BC và đường thẳng AO cắt nhau tại H.

Chứng minh $AB^2 = AE.AD = AH.AO$ và $\widehat{HDO} = \widehat{HBE}$.

3. Lấy điểm M thuộc tia đối của tia CB. Gọi N là chân đường vuông góc kẻ từ điểm M đến đường thẳng AB. Chứng minh đường thẳng BE đi qua trung điểm của đoạn thẳng MN.

Câu V. *(0.5 điểm)*

Với các số thực dương x và y thỏa mãn $x + y + xy = 3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{3}{x+y} - xy$

PHẦN II. PHÂN TÍCH CẤU TRÚC

Nhìn chung, đề thi môn Toán của Hà Nội những năm gần đây được giữ nguyên cấu trúc. Đây là điểm thuận lợi rất lớn cho thầy cô và học sinh trong việc dạy học và ôn thi. Nội dung đề thi chủ yếu nằm trong chương trình Toán lớp 9, nhưng cũng yêu cầu học sinh vẫn phải nắm được các kiến thức Toán học ở các lớp dưới của cấp THCS.

Đề thi năm nay cũng không ngoại lệ, nhìn tổng thể tương đương so với đề các năm. Một số nhận xét chi tiết:

1. Câu 1–c

Có một bẫy nhỏ "bình phương của một biểu thức là không âm", nhiều bạn chủ quan bỏ qua điều kiện này nên dễ mất điểm (thường sẽ bị trừ 0.25đ coi như điều kiện không đầy đủ).

2. Giải bài toán bằng cách lập phương trình

Học sinh nhớ đặt điều kiện hợp lý: nếu gọi số xe tải loại lớn là x thì $x \in N^*$, nếu đặt số xe tải loại nhỏ là x thì $x \in N^*$ và $x > 2$. Đọc kỹ đề để không nhầm kết luận.

3. Câu Viète

Khác với mọi năm, biểu thức ở đề thi năm nay bất đối xứng và lạ nên sẽ khó khăn với một số bạn. Tuy nhiên nếu bình tĩnh suy nghĩ, để ý thấy hệ số "c" của phương trình hoành độ giao điểm là hằng số. Khi đó các em sẽ quy được về bài toán quen thuộc: dùng chính hệ thức yêu cầu kết hợp với định lý Viète tạo ra hệ phương trình thứ cấp để tìm ra x_1, x_2 và m tương ứng.

Đây là điều mà chúng tôi đề cập rất kỹ với nhiều ví dụ trong cuốn sách: **"NHỮNG DẠNG TOÁN QUAN TRỌNG LIÊN QUAN ĐẾN ĐỊNH LÝ VIÈTE".**

4. Câu hình phẳng

Đề khá hay, hình dễ vẽ hơn 2023. Sự khác biệt bắt đầu từ ý (b) khi năm nay phải chứng minh 2 ý nhỏ làm tăng độ khó so với những năm trước. Ý (c) không quá khó, vừa sức với học sinh khá giỏi. Dự đoán thang điểm của bài này là 1 – 1.5 – 0.5.

Dạng toán này chúng tôi đã đề cập trong cuốn sách "**BÍ QUYẾT GIÀNH ĐIỂM TUYỆT ĐỐI MÔN TOÁN**".

5. Câu bất đẳng thức

Được đánh giá là nhẹ hơn so với các năm trước, quan trọng nhất vẫn là học sinh biết khai thác đầu vào của bài toán. Tiếp đó các em có thể dự đoán điểm rơi rồi chứng minh trực tiếp bằng cách xét hiệu hoặc tách và dùng bất đẳng thức Cauchy đều được.

Ở đây nếu mở rộng điều kiện x, y là các số không âm thì có thể có được cả GTNN và GTLN.

PHẦN III. HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

ĐỀ THI VÀO LỚP 10 MÔN TOÁN CỦA THÀNH PHỐ HÀ NỘI NĂM HỌC 2024–2025

Câu I. *(2.0 điểm)*

Cho hai biểu thức $A = \frac{x}{\sqrt{x}-3}$ và $B = \frac{2x-3}{x-3\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ với $x > 0, x \neq 9$.

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 16$.

2) Chứng minh $B = \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3}$

3) Tìm tất cả giá trị của x để $A - B < 0$

Phân tích hướng giải và bình luận:

1) Với $x = 16$ (thỏa mãn $x > 0, x \neq 9$) khi đó:

$A = \frac{x}{\sqrt{x}-3} = \frac{16}{\sqrt{16}-3} = 16.$

Vậy tại $x = 16$ thì $A = 16$.

2) Ta biến đổi:

$$B = \frac{2x-3}{x-3\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2x-3}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)} - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$= \frac{2x-3}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)} - \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)} = \frac{2x-3-\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)}$$

$$= \frac{2x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)} = \frac{\sqrt{x}(2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)} = \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3}$$

Vậy với $x > 0, x \neq 9$ thì $B = \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3}$

3) Ta có $A - B = \frac{x}{\sqrt{x}-3} - \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3} = \frac{x-2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} = \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}-3}$

Để ý rằng $(\sqrt{x}-1)^2 \geq 0$ nên $A - B < 0 \Leftrightarrow \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}-3} < 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{x}-1)^2 > 0 \\ \sqrt{x}-3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x < 9 \end{cases}$$

Vậy các giá trị của x cần tìm là $0 < x < 9$ và $x \neq 1$.

Ở đây chỉ lưu ý là các em không được quên xét $(\sqrt{x}-1)^2 > 0$ trong khi làm bài.

Học sinh cũng có thể tự sáng tạo ra các yêu cầu, chẳng hạn như "Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để B nhận giá trị nguyên" nhằm nâng cao khả năng của mình.

Câu II. *(2.0 điểm)*

1) *Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:*

Để chở 15 tấn thiết bị phục vụ Lễ kỷ niệm 70 năm chiến thắng Điện Biên Phủ, một đội vận chuyển dự định sử dụng các xe tải loại nhỏ. Do thay đổi kế hoạch, đội vận chuyển quyết định chỉ sử dụng các xe tải loại lớn. vì vậy, số xe tải sử dụng giảm đi 2 xe so với dự định và mỗi xe tải loại lớn chở nhiều hơn xe tải loại nhỏ là 2 tấn. Hỏi đội vận chuyển sử dụng bao nhiêu xe tải loại lớn? (Biết mỗi xe tải cùng loại đề chở số tấn thiết bị bằng nhau).

2) Một bình đựng nước có dạng hình trụ với bán kính đáy là 4 cm và chiều cao là 25 cm. Tính diện tích xung quanh của bình đựng nước đó (lấy $\pi \approx 3.14$)

Phân tích hướng giải và bình luận:

1) Gọi số xe loại lớn mà đội sử dụng thực tế là x (xe)

Điều kiện: $x \in N^*$

Khi đó mỗi xe chở khối lượng thiết bị là: $\frac{15}{x}$ (tấn)

Số xe tải loại nhỏ mà đội dự tính sử dụng là: x + 2 (xe)

Khối lượng mà mỗi xe loại nhỏ dự định chở là: $\frac{15}{x} - 2$ (tấn)

Các xe tải loại nhỏ này cũng dự định chở 15 tấn thiết bị nên ta có phương trình:

$$\left(\frac{15}{x} - 2\right)(x + 2) = 15$$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 15 = 0 \Leftrightarrow (x + 5)(x - 3) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 5 = 0 \\ x - 3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -5 \text{ (loại)} \\ x = 3 \text{ (thỏa mãn)} \end{array}\right.$$

Vậy số xe loại lớn mà đội vận chuyển sử dụng là 3 xe.

2) Theo bài ra bình nước hình trụ có bán kính đáy r = 4cm và chiều cao h = 25cm

Sử dụng công thức tính diện tích xung quanh $S = 2\pi rh$ ta có:

$S \approx 2 \times 3,14 \times 4 \times 25 = 628$ cm^2.

Vậy diện tích xung quanh của bình nước đó khoảng 628 cm^2.

Câu III. *(2.5 điểm)*

1) Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{3x+1}+2y=4\\ 3\sqrt{3x+1}-y=5\end{cases}$

2) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = (m - 2)x + 5$ (m là tham số).

a) Chứng minh rằng (d) luôn cắt (P) tại 2 điểm phân biệt.

b) Gọi x_1, x_2 là hoành độ các giao điểm của (d) và (P).

Tìm tất cả các giá trị của m để $x_1 + 5x_2 = 0$.

Phân tích hướng giải và bình luận:

1) Điều kiện: $3x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{3}$. Khi đó:

$$\begin{cases}\sqrt{3x+1}+2y=4\\ 3\sqrt{3x+1}-y=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3\sqrt{3x+1}+6y=12\\ 3\sqrt{3x+1}-y=5\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}3\sqrt{3x+1}-y=5\\ 7y=7\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{3x+1}=2\\ y=1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}3x+1=4\\ y=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1 \text{ (thỏa mãn)}\\ y=1\end{cases}$$

Vậy $x = 1$; $y = 1$ là nghiệm duy nhất của hệ phương trình đã cho.

2a) Xét phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng (d) và parabol (P):

$x^2 = (m - 2)x + 5 \Leftrightarrow x^2 - (m - 2)x - 5 = 0$ (*)

Ta có: $\Delta = (m - 2)^2 + 20 > 0$ với mọi m.

Do đó phương trình (*) luôn có hai nghiệm phân biệt, đồng nghĩa với (d) luôn cắt (P) tại 2 điểm phân biệt.

2b) Vì x_1, x_2 là hoành độ giao điểm của đường thẳng (d) và parabol (P) nên chúng chính là 2 nghiệm của phương trình (*).

Theo định lý Viète thì $\begin{cases}x_1+x_2=m-2\\ x_1x_2=-5\end{cases}$

Ta có: $x_1 + 5x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -5x_2$

Thay vào hệ thức $x_1x_2 = -5$ ta được:

$$-5x_2.x_2 = -5 \Leftrightarrow x_2^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_2=-1\\ x_2=1\end{array}\right.$$

* Với $x_2 = -1 \Rightarrow x_1 = -5x_2 = 5$

$\Rightarrow$ m = $x_1 + x_2 +\ 2 = 6$

* Với $x_2\ = 1 \Rightarrow x_1\ = -5x_2\ = -5$

$\Rightarrow$ m = $x_1 + x_2 +\ 2 = -2$

Vậy tập các giá trị của m cần tìm là: m ∈ $\{-2;\ 6\}$

Như vậy: Với các biểu thức bất đối xứng chúng ta không có công thức biến đổi chung nào, nó phải tùy thuộc vào từng bài toán cụ thể. Tuy nhiên các em hãy đặc biệt để ý đến *"hệ quả của định lý Viète"* nghĩa là cần kiểm tra (a + b + c) hay (a – b + c) xem chúng có bằng không hay không trước khi nghĩ tới việc dùng Delta và chỉ dùng biệt thức này khi nó là biểu thức chính phương. Nếu không được nữa thì quay trở lại phân tích chính cái biểu thức ở đề bài (ví dụ phân tích thành nhân tử, đánh giá bất đẳng thức, kết hợp với hệ số hằng…) với hi vọng tìm ra được mối quan hệ đơn giản hơn giữa các nghiệm của phương trình.

Đây là điều mà chúng tôi đề cập rất kỹ với nhiều ví dụ trong cuốn sách: **"NHỮNG DẠNG TOÁN QUAN TRỌNG LIÊN QUAN ĐẾN ĐỊNH LÝ VIÈTE"**.

Câu IV. *(3.0 điểm)*

Từ điểm A nằm bên ngoài đường tròn (O), kẻ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (O) (B, C là hai tiếp điểm).

1) Chứng minh tứ giác ABOC là tứ giác nội tiếp.

2) Vẽ đường kính BD của đường tròn (O). Gọi E là giao điểm thứ hai của đường thẳng AD và đường tròn (O). Đường thẳng BC và đường thẳng AO cắt nhau tại H.

Chứng minh AB^2 = AE.AD = AH.AO và $\widehat{HDO} = \widehat{HBE}$.

3) Lấy điểm M thuộc tia đối của tia CB. Gọi N là chân đường vuông góc kẻ từ điểm M đến đường thẳng AB. Chứng minh đường thẳng BE đi qua trung điểm của đoạn thẳng MN.

Phân tích hướng giải và bình luận:

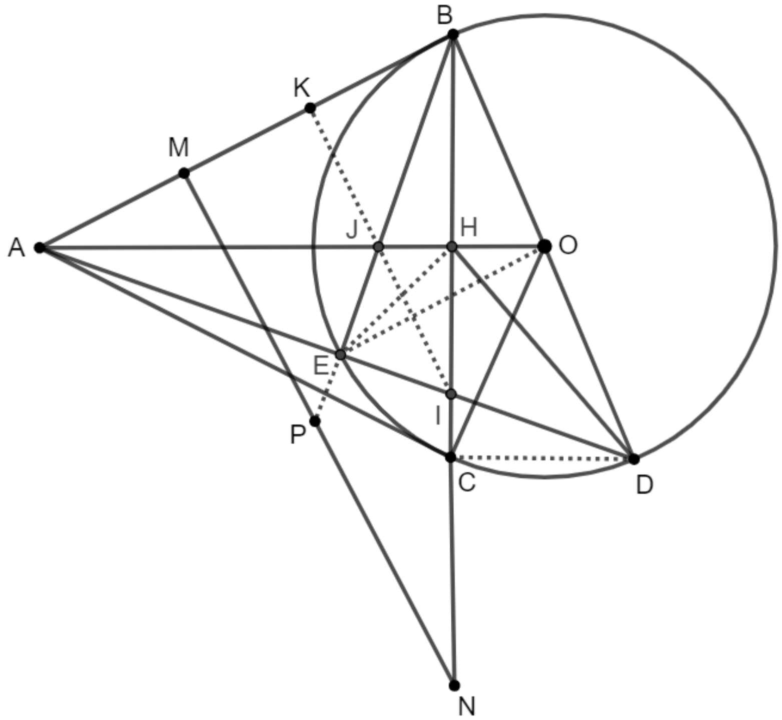
1) Vì AB, AC là các tiếp tuyến với (O) nên OB ⊥ AB và OC ⊥ AC ⇒ $\widehat{ABO} =\ 90^0$ và $\widehat{ACO} =\ 90^0$

Xét tứ giác ABOC có $\widehat{ABO}$ và $\widehat{ACO}$ là hai góc đối, đồng thời $\widehat{ABO} + \widehat{ACO} =\ 180^0$ nên ABOC là tứ giác nội tiếp (dấu hiệu nhận biết).

2) Vì AB, AC là các tiếp tuyến với (O) nên AB = AC. Kết hợp với OB = OC suy ra AO là trung trực của BC.

Khi đó sử dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ABO với đường cao BH ta có:

AB^2 = AH.AO (1)



Vì BD là đường kính nên $\widehat{BEO} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow BE \perp AD$.

Tiếp tục sử dụng hệ thức lượng đối với tam giác vuông ABD, đường cao BE: $AB^2 = AE.AD$ (2)

Từ (1) và (2) ta được: $AB^2 = AE.AD = AH.AO$

Ta phân tích ý tưởng cho việc chứng minh $\widehat{HDO} = \widehat{HBE}$.

Giả sử có $\widehat{HDO} = \widehat{HBE}$, nhận thấy ABHE là tứ giác nội tiếp (2 đỉnh kề H và E cùng nhìn AB dưới một góc vuông) $\Rightarrow \widehat{HBE} = \widehat{EAH} = \widehat{DAO}$

$\Rightarrow \widehat{HDO} = \widehat{DAO} \Rightarrow \Delta OAD \backsim \Delta ODH$ (g–g) $\Rightarrow \frac{OD}{OH} = \frac{OA}{OD}$

$\Rightarrow OD^2 = OA.OH$ mà $OB = OD \Rightarrow OB^2 = OA.OH$. Điều này hiển nhiên đúng theo hệ thức lượng trong tam giác vuôn ABO với đường cao BH. Đây cũng chính là điểm bắt đầu cho công việc của chúng ta.

Thật vậy, giờ các em chỉ cần lần ngược lại:

Sử dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ABO ta có:

$OB^2 = OA.OH$ mà $OB = OD \Rightarrow OD^2 = OA.OH \Rightarrow \frac{OD}{OH} = \frac{OA}{OD}$

Xét 2 tam giác OAD và ODH có: $\begin{cases} \frac{OD}{OH} = \frac{OA}{OD} \\ \widehat{HOD} \text{ chung} \end{cases} \Rightarrow \Delta OAD \backsim \Delta ODH$ (c–g–c)

$\Rightarrow \widehat{HDO} = \widehat{DAO}$ (3)

Xét tứ giác ABHE có H và E là 2 đỉnh kề, đồng thời $\widehat{BHA} = \widehat{BEA} = 90^0 \Rightarrow$ ABHE là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{HBE} = \widehat{HAE}$ (cùng chắn cung HE) hay $\widehat{HBE} = \widehat{DAO}$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra: $\widehat{HDO} = \widehat{HBE}$.

Ngoài ra còn nhiều cách chứng minh cho phần này:

Chẳng hạn từ $AE.AD = AH.AO \Rightarrow$ EHOD là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{HDO} = \widehat{HEO}$.

Mà $\widehat{HEO} = \widehat{HED} - \widehat{OED} = \widehat{HED} - \widehat{ODE} = \widehat{HED} - \widehat{ABE}$

Tứ giác ABHE nội tiếp nên $\widehat{HED} = \widehat{ABC} \Rightarrow \widehat{HEO} = \widehat{ABC} - \widehat{ABE} = \widehat{HBE}$.

Các em cũng thu được kết quả tương tự.

Như chúng tôi đã đề cập trong cuốn **"BÍ QUYẾT GIÀNH ĐIỂM TUYỆT ĐỐI MÔN TOÁN"** bài toán này còn có một kết quả rất hay nữa là: **HC sẽ là phân giác trong của góc EHC và AE.ID = AD.IE.**

3) Bằng cách gọi I là giao điểm của ED và HC, J là giao điểm của AH và BE, K là giao điểm của IJ và AB, P là giao điểm của BE và MN.

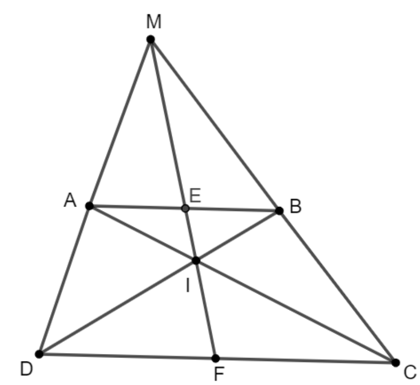
Đây là một ý tương đối hay, các em có thể chứng minh qua việc xét đồng dạng tương ứng. Cụ thể chứng minh được: $\Delta MBN \backsim \Delta CDB$

Theo kết quả câu (b) suy ra $\Delta DHB \backsim \Delta BPN$, mà H là trung điểm của BC nên cũng chỉ ra được P là trung điểm của MN.

Chúng tôi xin giới thiệu một cách khác để bạn đọc tham khảo cũng như biết đâu đó sẽ ứng dụng được khi gặp những bài toán khác. Nhưng trước hết ta phải chứng minh lại "Bổ đề hình thang" như sau:

Bổ đề: Trong hình thang hai đáy không bằng nhau, giao điểm của hai đường thẳng chứa hai cạnh bên, giao điểm của hai đường chéo và trung điểm của hai đáy cùng nằm trên một đường thẳng.

Chứng minh:



Gọi giao điểm của DA và CB là M, AC và BD là I, MI cắt AB tại E và cắt CD tại F. Khi đó sử dụng hệ quả của định lý Thalès và tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{EA}{FC} = \dfrac{IE}{IF} \\ \dfrac{EB}{FD} = \dfrac{IE}{IF} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{EA}{FC} = \frac{EB}{FD} = \frac{EA+EB}{FC+FD} = \frac{AB}{CD}$$

$$\begin{cases} \dfrac{EA}{FD} = \dfrac{MA}{MB} \\ \dfrac{EB}{FC} = \dfrac{MC}{MC} \end{cases} \quad \text{Để ý rằng} \Rightarrow \frac{MA}{MB} = \frac{MC}{MC} = \frac{AB}{CD} \Rightarrow \frac{EA}{FD} = \frac{EB}{FC} = \frac{AB}{CD}$$

Suy ra $\dfrac{EA}{FC} = \dfrac{EB}{FD} = \dfrac{EA}{FD} = \dfrac{EB}{FC} \Rightarrow$ E, F lần lượt là trung điểm của AB và CD hay M, E, I, F thẳng hàng. Bổ đề được chứng minh.

Trở lại bài toán:

Trong tam giác AIB có AH và BE là các đường cao $\Rightarrow$ J là trực tâm của $\Delta AIB \Rightarrow IK \perp AB$.

Do đó IKBD là hình thang. Vì O là trung điểm của BD nên theo bổ đề hình thang thì J là trung điểm của JK.

Ta lại xoay sang hình thang MKIN có J là trung điểm của JK ⇒ BJ phải đi qua trung điểm của MN hay đường thẳng BE đi qua trung điểm của đoạn thẳng MN.

Đến đây bài toán được chứng minh hoàn chỉnh.

Câu V. *(0.5 điểm)*

Với các số thực dương x và y thỏa mãn $x + y + xy = 3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{3}{x+y} - xy$

Phân tích hướng giải và bình luận:

Đối với các bài toán có điều kiện đầu vào phức tạp, quan trọng nhất là các em biết cách khai thác giả thiết sao cho hợp lý. Ở đây chúng tôi sẽ trình bày một cách đơn giản, không sử dụng bất đẳng thức cổ điển:

Do $(x - y)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$

$\Rightarrow x^2 + 2xy + y^2 \geq 4xy$ hay $(x + y)^2 \geq 4xy \Rightarrow xy \leq \frac{1}{4}(x+y)^2$

Do đó $x + y + xy = 3 \Rightarrow \frac{1}{4}(x+y)^2 + (x+y) \geq 3$

Đặt $x + y = t$ $(t > 0)$ ta được:

$\frac{1}{4}t^2 + t \geq 3 \Leftrightarrow t^2 + 4t - 12 \geq 0 \Leftrightarrow (t - 2)(t + 6) \geq 0$

Với $t > 0$ thì $t + 6 > 0 \Rightarrow t - 2 \geq 0 \Rightarrow$ $t \geq 2$.

Mặt khác, từ giả thiết $x + y + xy = 3 \Rightarrow xy = 3 - (x + y) = 3 - t$

Thay vào ta được:

$P(t) = \frac{3}{t} - (3 - t) = \frac{3}{t} + t - 3$

Với bài toán đối xứng các em dự đoán điểm rơi tại tâm $x = y = 1$, khi đó $t = 2$.

Xét hiệu:

$P(t) - P(2) = \frac{3}{t} + t - 3 - \frac{1}{2} = \frac{2t^2 - 7t + 6}{2t} = \frac{(t-2)(2t-3)}{2t}$

Với $t \geq 2$ thì $t - 2 \geq 0$ và $2t - 3 > 0$ nên $\frac{(t-2)(2t-3)}{2t} \geq 0$

$\Rightarrow P(t) - P(2) \geq 0 \Rightarrow P(t) \geq P(2) = \frac{1}{2}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $t = 2$ hay $x = y = 1$.

Vậy kết luận GTNN của P là $\frac{1}{2}$.

Với các em giỏi hơn có thể làm như sau:

Ta sẽ đi tìm hằng số α để tại $t = 2$ thì $\frac{3}{t} = \alpha t \Rightarrow \alpha = \frac{3}{t^2} = \frac{3}{4}$

Như thế ta phân tách: $P = \frac{3}{t} + t - 3 = \left(\frac{3}{t} + \frac{3}{4}t\right) + \frac{1}{4}t - 3$

Theo bất đẳng thức Cauchy thì: $\frac{3}{t} + \frac{3}{4}t \geq 2\sqrt{\frac{3}{t}.\frac{3}{4}t} = 3$

Kết hợp với $t \geq 2$ ta được: $P \geq 3 + \frac{1}{4}.2 - 3 = \frac{1}{2}$.

Ta cũng thu được kết quả tương tự.

Lưu ý: Nhiều em không phân tách mà dùng ngay bất đẳng thức Cauchy: $\frac{3}{t} + t \geq 2\sqrt{\frac{3}{t}.t} = 2\sqrt{3}$

$\Rightarrow P \geq 2\sqrt{3} - 3$ và kết luận GTNN của P là $2\sqrt{3} - 3$. Cách làm mày chưa đúng bởi dấu "=" xảy ra khi $t = \sqrt{3} < 2$ (mâu thuẫn điều kiện $t \geq 2$).

Ngoài việc khai thác đầu vào để nhận được $x + y \geq 2$, học sinh có thể sử dụng bất đẳng thức Cauchy: $x + y \geq 2\sqrt{xy}$ kết hợp với $x + y + xy = 3 \Rightarrow xy + 2\sqrt{xy} - 3 \leq 0 \Rightarrow 0 < xy \leq 1$.

Từ đây đổi biến $t = xy$ và làm tương tự như trên.

Nếu mở rộng điều kiện x, y thì chúng ta còn thu được bài toán hoàn hảo hơn:

Bài toán: Với các số thực không âm x và y thỏa mãn $x + y + xy = 3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = \frac{3}{x + y} - xy$

Các em cùng thử tìm GTLN của P nhé!

Kết lại cho bài viết, chúng tôi mong muốn các em phải thận trọng khi làm toán, làm tỉ mỉ, chi tiết, suy tính thấu đáo để không bỏ sót trường hợp. Cần nhắc lại trong mỗi cuộc thi học sinh nên tìm hiểu kỹ quy chế thi trước khi làm bài: những gì được làm, được áp dụng, những gì nếu sử dụng phải chứng minh… để tránh mất điểm đáng tiếc.

Dù bạn ở bất cứ nơi đâu, làm việc gì, trong điều kiện, hoàn cảnh nào cũng hãy nhớ rằng: ***Cẩn tắc vô ưu!***

Trân trọng,

Hà Nội, ngày 09 tháng 06 năm 2024