

NGUYỄN KIM SỔ

BÍ QUYẾT

GIÀNH ĐIỂM TUYỆT ĐỐI

MÔN TOÁN

DÙNG CHO HỌC SINH ÔN THI VÀO LỚP 10 THPT
THEO CHƯƠNG TRÌNH SÁCH GIÁO KHOA MỚI

Toán học chính là tư duy, là tầm nhìn. Nếu tư duy tốt, tầm nhìn không hạn hẹp, bạn có thể làm bất cứ thứ gì bạn muốn.

Ở một khía cạnh nào đó, hãy đơn giản coi Toán học như là một trong những môn thể thao cường độ cao để rèn luyện sức khỏe và khi có sức khỏe tốt rồi thì làm việc gì cũng được.

NGUYỄN KIM SỔ

www.toanhocvietnam.vn

Bản quyền tác giả số: **6764/2024/QTG**.

Được chứng nhận bởi: Cục Bản quyền tác giả.

Cấp ngày: 02/08/2024.

GIỚI THIỆU CHUNG

Để chuẩn bị tốt cho kỳ thi vào lớp 10 THPT sắp tới nhất là những câu “điểm 10”, các em chú ý một số dạng toán nhằm phân loại học sinh như: bất đẳng thức, phương trình vô tỉ, c – Hình, ... Để bổ trợ thêm kiến thức, tác giả đã biên soạn cuốn sách “**BÍ QUYẾT GIÀNH ĐIỂM TUYỆT ĐỐI MÔN TOÁN**”. Tài liệu được viết tỉ mỉ, công phu, trình bày chi tiết phương pháp tư duy giúp giải quyết vấn đề cũng như cách tiếp cận một bài toán theo nhiều hướng khác nhau sao cho phù hợp với khả năng của từng học sinh, đặc biệt bám sát Chương trình sách giáo khoa mới. Cuốn sách với 8 phần chính, bao gồm:

- Phần I  **Phương pháp chứng minh bất đẳng thức**
- Phần II  **Phương pháp tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất**
- Phần III  **Hệ thức Viète và ứng dụng**
- Phần IV  **Phương trình, hệ phương trình**
- Phần V  **Hình học**
- Phần VI  **Toán thực tế**
- Phần VII  **Một số yếu tố thống kê và xác suất**
- Phần VIII  **Cẩn tắc vô ưu**

Nhìn chung việc ôn luyện nên được lên kế hoạch một cách cụ thể để tránh việc học lệch. Muốn đạt điểm cao các em cần có chiến lược rõ ràng khi thi. Tập thói quen đọc lướt toàn bộ các câu hỏi khi nhận đề thi để nhận dạng cũng như đánh giá độ khó của các bài toán. Từ đó xác định xem câu nào có thể làm được ngay, câu nào cần nhiều thời gian, ... rồi phân chia làm câu nào trước, câu nào sau.

Nhớ nguyên tắc **3K**: Làm đến đâu **Kiểm** tra đến đó, xong 1 bài phải **Kiểm** tra và trước khi nộp bài cần **Kiểm** tra. Thí sinh cũng nên có 1 tờ giấy nhỏ ghi lại trạng thái các phần: đã làm được, chưa làm, chưa hoàn thành, cần xem lại, ... để tránh làm thiếu bài thi.

NHỮNG ĐIỀU HỌC SINH CẦN LƯU Ý

TRONG KỲ THI VÀO LỚP 10 THPT – MÔN TOÁN

Bài thi môn Toán thường góp phần rất lớn quyết định đến kết quả của kỳ thi. Vì thế, học sinh cần giữ cho mình tinh thần thật thoải mái, tự tin và lưu ý:

- 1.** Trước khi thi ít nhất 15 ngày phải ngủ nghỉ đúng giờ để lấy lại giờ giấc sinh học chuẩn. Trước ngày thi có khoảng nghỉ ngơi từ 1 đến 2 ngày, không học thêm kiến thức mới hay luyện đề gì nữa. Hạn chế chơi những môn thể thao có tính đối kháng cao.
- 2.** Ăn uống đủ chất, điều độ và không ăn uống linh tinh: đồ lạnh, cay, nóng, ... gây ảnh hưởng đến hệ tiêu hóa.
- 3.** Đi thi sớm hơn 15 đến 30 phút mỗi buổi thi. Nếu có điều kiện thì nhờ bố mẹ, người thân đưa đến tham quan địa điểm thi trước vài ba ngày để nhìn ngắm xung quanh tạo cảm giác thân quen như đang thi ở trường mình.
- 4.** Trước khi vào phòng thi ghi nhớ số báo danh, trò chuyện vui vẻ với bạn bè để giải tỏa áp lực. Tâm lý hồi hộp là không thể tránh khỏi. Các em nên hít thở sâu, hít vào 6 giây và thở ra 6 giây chậm để cung cấp oxy lên não nhiều hơn.
- 5.** Mang đủ đồ dùng học tập: thước kẻ, compa, eke, thước đo độ, bút chì, tẩy, bút viết (khoảng 3 chiếc và chúng đã được dùng 2-3 lần trước đó để chắc chắn không bị hỏng hay tắc mực), máy tính loại không có thể nhớ, không có chức năng soạn thảo văn bản và kết nối internet (mang thêm 1 máy dự phòng nếu có).
- 6.** Đọc kỹ đề bài (vài ba lượt) để nhớ lại dạng bài, gạch chân những ý lạ, những câu nhiều yêu cầu. Bài dễ làm trước, khó làm sau. Bài nhiều điểm phải làm chi tiết, tỉ mỉ. Bài khó, ít điểm làm ngắn gọn. Nếu dùng kiến thức bên ngoài sách giáo khoa thì tốt nhất là nên chứng minh lại.
- 7.** Các bài tính toán luôn nhớ dùng máy tính kiểm tra lại kết quả (không được chủ quan). Thấy kết quả không được đẹp, biểu thức sau khi biến đổi quá cồng kềnh phức tạp thì xem lại cách làm từ đầu xem có sai ở đâu không.

Đặt chỉ mục các phần đã làm được, chưa làm, chưa hoàn thành, cần xem lại, ... để tránh bỏ sót. Làm cẩn thận từng bước, kiểm tra đúng mới làm tiếp.

8. Bài thống kê và xác suất: thường không khó, học sinh cần nắm vững công thức và tính toán cẩn trọng.

9. Bài rút gọn không được quên kẻ dấu phân thức. Khi làm ý (c) chú ý đặt thêm điều kiện thứ cấp (nếu cần), so lại các giá trị x tìm được với điều kiện bài toán để loại bỏ nếu vi phạm.

10. Bài giải bài toán bằng cách lập phương trình, hệ phương trình: không làm tắt bước "biểu diễn các đại lượng". Nhớ ghi đơn vị từng đại lượng được biểu diễn và điều kiện khi nào là số thực dương, khi nào là số nguyên dương. Khi tìm được nghiệm nhớ so sánh với điều kiện để đưa ra kết luận phù hợp.

11. Bài đồ thị hoặc phương trình bậc hai: không được quên điều kiện để phương trình có nghiệm. Với các bài toán bất đối xứng, phức tạp thì hãy để ý đến hệ quả của định lý Viète, biệt thức chính phương, phân tích đa thức hai biến thành nhân tử... để tìm mối liên hệ giữa các nghiệm.

12. Bài hình học trực quan: thuộc công thức tính các đại lượng để áp dụng vào thực tế. Chỉ thay giá trị của số " π " vào bước cuối để tránh làm tròn số nhiều lần.

13. Bài hình phẳng:

* Vẽ hình vào nháp trước rồi từ đó căn chỉnh và vẽ vào bài thi để đảm bảo đường thẳng không cắt vào ký hiệu điểm, hình không vượt ra ngoài tờ giấy thi. Nên vẽ hình ở trang cuối tờ thứ nhất cho dễ làm bài. Chỉ dùng compa chì vẽ đường tròn.

* Không ký hiệu quá rối trên hình (nếu cần dùng hình ngoài nháp).

* Chỉ dùng kết quả câu trên để làm câu dưới, không làm ngược lại. Nếu không làm được câu trước thì vẫn được dùng kết quả câu đó để làm câu tiếp theo.

* Trong trường hợp hình chưa tốt hay bị lem, học sinh có thể vẽ thêm một hình sạch đẹp hơn sau khi làm xong vào cuối bài thi.

14. Bài phân loại học sinh: trước tiên cố gắng dự đoán điểm rơi hoặc nghiệm cơ bản của phương trình, hệ phương trình để từ đó có căn cứ biến đổi.

15. Tuyệt đối không để trống trang đầu các tờ giấy thi. Làm ngay từ dòng đầu tiên mỗi trang giấy thi. Không trang trí, ghi các ký tự đặc biệt vào bài thi. Nhớ ghi đầy đủ phần phách, số tờ giấy làm bài.

Gần đây toán thực tế xuất hiện tương đối nhiều trong các đề thi. Học sinh muốn học tốt toán thực tế thì trước tiên phải nắm vững kiến thức cơ bản trong sách giáo khoa. Tiếp đó là phải phân loại được câu đó rơi vào dạng nào và khi đã xác định được dạng rồi thì có một nguyên tắc để giải là chuyển từ bài toán thực tế sang mô hình toán học. Đây là thao tác quan trọng và cũng rất khó, đòi hỏi học sinh phải có những trải nghiệm, hiểu được ngôn ngữ cuộc sống thường nhật, đọc nhiều tài liệu, làm nhiều đề để tích lũy kinh nghiệm.

Đặc biệt cần tuân thủ nguyên tắc *"Không đổi 9,0 điểm lấy 1,0 điểm Toán"*. Không tham bài 0,5 điểm (như c – Hình hay bài cuối) mất nhiều thời gian mà bỏ bài dễ nhưng nhiều điểm. Căn thời gian hợp lý để làm bài, bài nào khó quá suy nghĩ trong khoảng 10 phút chưa ra giải pháp thì chuyển bài khác và đánh dấu để quay lại sau.

CHIA SẺ CÙNG QUÝ PHỤ HUYNH VÀ CÁC EM HỌC SINH

Trong suốt quá trình học, nghiên cứu và giảng dạy tác giả đã nhận được rất nhiều câu hỏi nhưng có lẽ “Học toán để làm gì?” không chỉ là của học sinh, sinh viên mà thậm chí ngay cả những người trước đây từng học, thậm chí học rất giỏi về bộ môn này cũng đặt ra. Đây là điều nghịch lý và cũng làm cho tác giả suy nghĩ nhất về cái “sự học” ở đời. Giáo sư Tạ Quang Bửu từng nói: “Chỉ có cách nhìn thiên cận mới không thấy được vai trò của toán học”. Nhân việc biên soạn cuốn sách, cũng xin mạo muội chia sẻ đôi điều với bạn đọc gần xa.

Toán học hay các môn khoa học khác kể cả khoa học tự nhiên, khoa học xã hội đã được đưa vào trong nhà trường để dạy cho học sinh đều có ý nghĩa nhất định, giúp cho các em hiểu biết được cội nguồn dân tộc, từng bước hiểu được những sự vật, hiện tượng xung quanh cũng như lịch sử phát triển của nhân loại. Xã hội càng phát triển, con người càng phải vận động, càng phải trang bị nhiều kiến thức để phù hợp xu thế chung và không bị bỏ lại phía sau.

Trí tuệ hay còn gọi là khả năng tư duy, sáng tạo từ lâu đã được coi là tài sản lớn nhất của con người. Học toán hay bất cứ bộ môn nào không nhất thiết các em lớn lên phải làm đúng lĩnh vực đó, sống bằng nghề đó. Học chính là để cho bộ não được tôi rèn, phát triển tư duy, suy nghĩ mạch lạc và khoa học. Mai sau này trong cuộc sống khi gặp những vấn đề thực tế thì hi vọng rằng bởi sự rèn luyện với bao khó khăn gian khổ ấy chúng ta có thể tìm ra giải pháp phù hợp, tối ưu cho công việc. Cũng như một cái cây, trong quá trình sinh trưởng, phát triển trải qua bao nắng mưa dãi dầu, vượt qua bao sỏi đá chông gai bám rễ sâu vào lòng đất thì sau này dù gặp bão táp phong ba, hạn hán lụt lội vẫn đủ sức đứng vững, đơm hoa kết trái mang lại quả ngọt cho đời. Đây là mục tiêu lớn nhất của dạy và học toán phổ thông.

Học chính là quá trình tự rèn luyện, tu dưỡng bản thân để trưởng thành hơn. Chữ “nhân” kia viết ra đơn giản nhưng muốn làm “người” lại khó vô cùng, vậy nên cần “học làm người trước khi làm việc”. Tác giả có một may mắn được tiếp xúc với toán học từ rất sớm, khi ngồi trên ghế nhà trường đã trải

qua nhiều cuộc thi lớn nhỏ, thất bại có – thành công có và sau này theo học tại Khoa Toán ứng dụng của Đại học Bách khoa Hà Nội. Ở đây, chúng tôi ngoài Toán ra còn được học rất nhiều môn khoa học khác như Vật lý, Hóa học, Cơ học, Nhiệt học, Điện tử, Tin học, ... đó là khoảng thời gian vô cùng bổ ích, ý nghĩa, giúp sinh viên tiếp cận được với lượng kiến thức khổng lồ của nền văn minh nhân loại và nếu cho chọn lại, tôi cũng vẫn sẽ chọn nơi này!

Là một người làm toán và chọn Toán ứng dụng nên mọi thứ đối với tôi đều rất khoa học, thực tế. Khi lần đầu tiếp xúc với học sinh, bước vào lớp không phải đặt ra một bài toán thật khó với lời giải, ký hiệu phức tạp để các em “mất chữ A miệng chữ O” đầy thán phục. Việc dạy không hẳn bắt đầu như thế, không phải bằng việc cung cấp ngay cho học sinh những điều mình có mà đơn giản là hỏi xem học sinh cảm nhận về môn học này thế nào, có khó khăn gì trong quá trình học tập, nghiên cứu hay không? Từ đó tìm hiểu sâu hơn về năng lực, nguyện vọng từng bạn, từng nhóm học sinh... kịp thời bổ sung những chỗ còn thiếu hay giúp các em phát triển hơn nữa vào từng thời điểm, giai đoạn thích hợp. Ngoài ra, giáo viên cũng nên cung cấp thông tin cho học sinh về những ứng dụng thực tế, những thành tựu nó mang lại cho đời sống con người, kể về lịch sử phát triển, về những tấm gương người thật việc thật, đôi khi cả những thách thức, những bài toán thiên niên kỷ còn dang dở và đang chờ đợi lời giải đáp từ các nhà toán học tương lai. Nhà Vật lý đoạt giải Nobel Richard Feynman (1918–1988) đã nói rằng: *“Học sinh không cần một giáo viên hoàn hảo. Học sinh cần một giáo viên vui vẻ, người sẽ khiến các em hào hứng đến trường và nuôi dưỡng niềm yêu thích học tập”*. Giáo viên cần phải giải thích nội dung bài học mới mẻ với học sinh bằng cách diễn đạt đơn giản và dễ hiểu nhất. Nếu học sinh không hiểu thì cần phải tiếp tục giảng dạy bằng mọi cách cho đến khi học sinh có thể hiểu được hoàn toàn. Thầy cô không chỉ đứng trên bục giảng mà hãy đi cùng như người bạn đồng hành trên con đường trưởng thành, phát triển của các em.

Mỗi người sinh ra đều có mặt mạnh, yếu khác nhau. Những thiên tài như Johann Carl Friedrich Gauß, Évariste Galois, Wolfgang Amadeus Mozart, ... thường rất ít, nhưng nếu chỉ cần nhìn thấy một tia sáng, một nguồn năng lượng tích cực, tố chất Toán học thì bằng cách nào đó, thầy cô sẽ gạn đục

khơi trong, bồi và dưỡng (mỗi ngày bồi một chút) kết hợp với ý chí, sự chăm chỉ, cầu tiến của học sinh, sinh viên thì ắt sẽ đầy, sẽ thành. Nếu dạy mà học sinh không tiến bộ thì trách nhiệm đầu tiên thuộc về người thầy bởi phương pháp truyền đạt chưa phù hợp với học sinh đó và cần có sự thay đổi. Một điều quan trọng nữa là con của bạn phải được học những thầy cô giỏi nhất, tiếp xúc với những nhà khoa học hàng đầu, những người có tầm nhìn, kiến thức lỗi lạc. Ở gần những con người ấy, các em sẽ được nuôi dưỡng ước mơ, khát vọng, hoài bão lớn đưa chính bản thân vươn lên tầm cao mới. Đôi khi học sinh không nên chỉ tập trung giải toán theo phương pháp đã được dạy, mà hãy nghĩ mình mới là người thầy, người cô tốt nhất của bản thân. Hãy tự mình thắp sáng nhiệt huyết, khát vọng học hỏi, còn thầy cô là những người cầm đuốc soi đường.

Toán không xa rời thực tế như nhiều người lầm tưởng. Sẽ không quá nếu nói rằng: Mỗi chúng ta đều đang sống trong một thế giới được vận hành bởi Toán học, nó là đòn bẩy của phát minh. Những người làm toán luôn là những người đi tiên phong nếm mật nằm gai, mở đường, làm nền móng, cơ sở vững chắc cho các lĩnh vực khác phát triển. Khi những bông hoa đó khoe sắc thì Toán học lại một lần nữa quay trở lại vun vén, trau chuốt, mô tả kết quả bằng những con số, tính toán cụ thể để công trình ấy được đưa vào phục vụ cuộc sống.

Toán học chính là tư duy, là tầm nhìn. Nếu tư duy tốt, tầm nhìn không hạn hẹp, bạn có thể làm bất cứ thứ gì bạn muốn. Ở một khía cạnh nào đó, hãy đơn giản coi Toán học như là một trong những môn thể thao cường độ cao để rèn luyện sức khỏe và khi có sức khỏe tốt rồi thì làm việc gì cũng được.

Hi vọng cuốn sách sẽ giúp các em học sinh luyện tập, rèn giũa thật tốt để đạt kết quả cao trong các kỳ thi học sinh giỏi các cấp và đỗ đạt vào những ngôi trường trung học phổ thông mơ ước.

Mặc dù đã rất cố gắng nhưng trong quá trình biên soạn có thể còn những khiếm khuyết, rất mong nhận được sự góp ý của độc giả.

Trân trọng,

BẤT ĐẲNG THỨC

ĐỊNH NGHĨA VÀ TÍNH CHẤT

I. Định nghĩa

Hệ thức dạng $A < B$ (hay $A \leq B$, $A > B$, $A \geq B$) được gọi là bất đẳng thức. Khi đó A là vế trái, B là vế phải.

Nếu $A > B$ hoặc $A < B$ thì đó là những bất đẳng thức thực sự.

Ta thừa nhận các khẳng định sau:

1. Nếu $A > B$ thì $A - B > 0$. Ngược lại, nếu $A - B > 0$ thì $A > B$.
2. Nếu $A \geq B$ thì $A - B \geq 0$. Ngược lại, nếu $A - B \geq 0$ thì $A \geq B$.
3. Nếu $A < B$ thì $A - B < 0$. Ngược lại, nếu $A - B < 0$ thì $A < B$.
4. Nếu $A \leq B$ thì $A - B \leq 0$. Ngược lại, nếu $A - B \leq 0$ thì $A \leq B$.

Như vậy bất đẳng thức có 2 chiều. Thực tế người ta có thể vận dụng trực tiếp những khẳng định này để chứng minh và xu thế chung trong các đề thi hiện nay là khuyến khích học sinh sử dụng giải pháp như vậy, tránh dùng những bất đẳng thức không có trong chương trình giảng dạy thông thường. Trường hợp sử dụng những bất đẳng thức ngoài sách giáo khoa, nếu có thể các bạn nên chứng minh lại.

II. Tính chất cơ bản của bất đẳng thức

1. Nếu $a \geq b$ và $b \geq c$ thì $a \geq c$ (tính chất bắc cầu).
2. Nếu $a \geq b$ thì: $ma \geq mb$ nếu $m > 0$ và $ma \leq mb$ nếu $m < 0$.
3. Nếu $a \geq b$ và $c \geq d$ thì $a + c \geq b + d$.
4. Nếu $a \geq b$ và $c \leq d$ thì $a - c \geq b - d$.
5. Nếu $a \geq b \geq 0$ và $c \geq d \geq 0$ thì $ac \geq bd$.
6. Nếu $a \geq b \geq 0$ và $c \geq d > 0$ thì $\frac{a}{d} \geq \frac{b}{c}$.

Phần I. PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH

BẤT ĐẲNG THỨC

Chuyên đề này sẽ giới thiệu đến bạn đọc các phương pháp chứng minh bất đẳng thức từ đơn giản đến phức tạp như: chứng minh trực tiếp, gián tiếp, kỹ thuật tạo tích, hệ số bất định, phương pháp dồn biến, khai triển Abel, ... Mỗi phương pháp sẽ tương ứng với một số bài toán cụ thể làm ví dụ, tuy nhiên mục đích mà cuốn sách muốn hướng đến là phân tích và mang tới cho các em tư tưởng, xác định hướng đi trước một vấn đề cần giải quyết. Bên cạnh đó tác giả cố gắng tìm ra nhiều cách giải khác nhau, nhiều cách tiếp cận khác nhau để giúp các em nhìn thấu bài toán từ nhiều phương diện. Với các em học sinh, nếu học sâu được như thế rất hữu ích bởi trong tay có nhiều công cụ, giải pháp thì khi gặp các bài toán mới, cơ hội để bạn giải quyết được chúng sẽ lớn hơn.

Bài toán 1.1. Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn:

$$2x(x + y) + y(y + 4) = 17. \text{ Chứng minh rằng: } S = \frac{3}{x} + \frac{y}{4} + \frac{1}{y} \geq \frac{11}{4}.$$

Phân tích hướng giải và bình luận:

Đối với các bài toán có điều kiện đầu vào phức tạp, quan trọng nhất là các em biết cách khai thác giả thiết đầu vào sao cho hợp lý. Ta phân tích:

$$\begin{aligned} 2x(x + y) + y(y + 4) &= 2x^2 + 2xy + y^2 + 4y \\ &= (x^2 + y^2 + 4 + 2xy + 4x + 4y) + (x^2 - 4x + 4) - 8 \\ &= (x + y + 2)^2 + (x - 2)^2 - 8. \text{ Khi đó:} \end{aligned}$$

$$\text{Khi đó: } 2x(x + y) + y(y + 4) = 17$$

$$\Rightarrow (x + y + 2)^2 + (x - 2)^2 - 8 = 17$$

$$\Rightarrow (x + y + 2)^2 = 25 - (x - 2)^2.$$

$$\text{Vì } (x - 2)^2 \geq 0 \text{ nên } (x + y + 2)^2 = 25 - (x - 2)^2 \leq 25.$$

$$\text{Suy ra: } -5 \leq x + y + 2 \leq 5 \text{ hay } -7 \leq x + y \leq 3.$$

Kết hợp với $x, y > 0$ ta được $0 \leq x + y \leq 3$. Đến đây học sinh thường nghĩ tới việc áp dụng bất đẳng thức Cauchy, tuy nhiên việc phân tích S như thế nào để đảm bảo điều kiện tồn tại dấu đẳng thức lại không dễ.

Kinh nghiệm cho thấy: Trong các biến đổi học sinh nên giữ nguyên các biểu thức chứa biến ở mẫu nếu có thể hoặc hạn chế đến mức tối đa việc thay đổi chúng. Từ cách biến đổi dẫn đến $x + y \leq 3$, dự đoán dấu đẳng thức xảy ra (còn gọi là điểm rơi) khi $x = 2; y = 1$ nên ta sẽ đi tìm các hằng số α, β để tại $x = 2$ và $y = 1$ thì:

$$\begin{cases} \frac{3}{x} = \alpha x \\ \frac{1}{y} = \beta y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{2} = 2\alpha \\ \frac{1}{1} = \beta \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{3}{4} \text{ và } \beta = 1.$$

Mục đích là để sau đó sử dụng bất đẳng thức AM-GM với các cặp $\frac{3}{x}$ và αx ; $\frac{1}{y}$ và βy nhằm khử mẫu nhưng vẫn phải đảm bảo dấu “=” xảy ra tại đúng

$x = 2; y = 1$. Phần thừa thiếu còn lại ắt sẽ phù hợp với điều kiện bài toán, học sinh không phải lo lắng điều này vì đó là nhiệm vụ của người ra đề thi.

Với α, β tìm được như trên định hướng cho các em cách phân tách và giải bài toán như sau:

$$S = \frac{3}{x} + \frac{y}{4} + \frac{1}{y} = \left(\frac{3}{x} + \frac{3x}{4}\right) + \left(\frac{1}{y} + y\right) - \frac{3}{4}(x + y).$$

Theo bất đẳng thức Cauchy:

$$\frac{3}{x} + \frac{3x}{4} \geq 2\sqrt{\frac{3}{x} \cdot \frac{3x}{4}} = 3 \text{ và } \frac{1}{y} + y \geq 2\sqrt{\frac{1}{y} \cdot y} = 2.$$

Kết hợp với $x + y \leq 3$ ta được:

$$S = \left(\frac{3}{x} + \frac{3x}{4}\right) + \left(\frac{1}{y} + y\right) - \frac{3}{4}(x + y) \geq 3 + 2 - \frac{3}{4} \cdot 3 = \frac{11}{4}.$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi: } \begin{cases} \frac{3}{x} = \frac{3x}{4} \\ \frac{1}{y} = y \\ x + y = 3 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này ta được: $x = 2; y = 1$. Bài toán được chứng minh.

Ngoài việc khai thác điều kiện ban đầu bằng cách sử dụng hằng đẳng thức như trên, học sinh cũng có thể biến đổi và sử dụng BĐT Bunhiacopxki:

$$2x(x + y) + y(y + 4) = 17$$

$$2x^2 + 2xy + y^2 + 4y = 17.$$

Nhân cả hai vế với 2 ta được:

$$4x^2 + 4xy + 2y^2 + 8y = 34$$

$$4x^2 + 4xy + y^2 + y^2 + 8y + 16 = 50$$

$$(2x + y)^2 + (y + 4)^2 = 50.$$

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki thì:

$$[(2x + y) + (y + 4)]^2 \leq 2[(2x + y)^2 + (y + 4)^2]$$

$$(2x + 2y + 4)^2 \leq 100 \Rightarrow -10 \leq 2x + 2y + 4 \leq 10 \Rightarrow -7 \leq x + y \leq 3.$$

Kết hợp với $x, y > 0$ ta được $0 \leq x + y \leq 3$.

Như thế có thể thấy rằng: Việc “dự đoán điểm rơi” vô cùng quan trọng trong việc chứng minh bất đẳng thức hay tìm GTNN – GTLN, kể cả giải một số phương trình, hệ phương trình khó sau này. Nó như một sợi dây mỏng nhưng hiện hữu xuyên suốt quá trình giải toán, giúp cho chúng ta tránh được biến đổi quá đà dẫn đến đi lệch hướng.

Người ta có nhiều cách nhưng nhanh nhất là dựa vào cấu trúc bài toán, ví dụ với điều kiện đơn giản: $a + b = 3$ thì điểm rơi thường xảy ra tại các điểm nguyên hoặc hữu tỉ như $(0; 3); (1; 2); (\frac{1}{2}; \frac{5}{2})$ hoặc tại tâm $(\frac{3}{2}; \frac{3}{2})$ với các bài toán đối xứng.

Phức tạp hơn, nếu là biểu thức có kèm trọng số ví dụ $2x + 3y \leq 4$ thì có thể chọn $x = \frac{1}{2}; y = 1$. Nếu biểu thức có chứa phân thức chẳng hạn $\frac{6}{a} + \frac{2}{b}$ thì điểm rơi thường là ước số của 6 hoặc 2 và nên chọn sao cho các hạng thức đó vênh nhau không quá nhiều, ví như trường hợp trên ta chọn $a = 3$ và $b = 1$.

Nói chung học sinh dựa vào bài toán cụ thể kết hợp với kinh nghiệm để dự đoán kết quả sao cho hợp lý, tập chung vào các điểm nguyên và hữu tỉ trước.

Đề thi thường cũng chỉ xảy ra trường hợp này, rất ít điểm rơi vô tỉ (nếu có thì ta thường phải dùng hệ số bất định rồi giải phương trình hoặc hệ phương trình để tìm ra chúng).

Lưu ý: Từ việc dự đoán “điểm rơi” và phân tích ở trên chúng ta thấy rằng thay vì việc tìm α, β ta có thể tìm hằng số dương k sao mà:

$$S = \frac{3}{x} + \frac{y}{4} + \frac{1}{y} = \left(kx + \frac{3}{x}\right) + \left[\left(\frac{1}{4} + k\right)y + \frac{1}{y}\right] - k(x + y).$$

$$\text{Khi đó: } S \geq 2\sqrt{kx \cdot \frac{3}{x}} + 2\sqrt{\left(\frac{1}{4} + k\right)y \cdot \frac{1}{y}} - 3k = 2\sqrt{3k} + \sqrt{1 + 4k} - 3k.$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi: } \begin{cases} x + y = 3 \\ kx = \frac{3}{x} \\ \left(\frac{1}{4} + k\right)y = \frac{1}{y} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{\frac{3}{k}} + \sqrt{\frac{4}{1 + 4k}} = 3.$$

Dự đoán hoặc sử dụng máy tính cầm tay có thể tìm được $k = \frac{3}{4}$, từ đó tính được $x = 2; y = 1$ như trên.

Nhìn qua có vẻ cồng kềnh, phức tạp. Tuy nhiên chúng ta cùng theo dõi tiếp bài toán sau đây để hiểu rõ hơn giá trị của kỹ thuật này trong trường hợp dự đoán điểm rơi khó khăn.

Bài toán 1.2. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn:

$$3x + 4y + 2z \geq 14. \text{ Chứng minh rằng: } 2\left(x + 2y + z\right) + \frac{2}{x} + \frac{1}{2y} + \frac{9}{z} \geq 17.$$

Phân tích hướng giải và bình luận:

Đặt $P = 2(x + 2y + z) + \frac{2}{x} + \frac{1}{2y} + \frac{9}{z}$, ta sẽ tìm hằng số k dương đơn giản nhất

$$\text{sao cho: } P = 2(x + 2y + z) + \frac{2}{x} + \frac{1}{2y} + \frac{9}{z}$$

$$= k(3x + 4y + 2z) + \left[(2 - 3k)x + \frac{2}{x}\right] + \left[(4 - 4k)y + \frac{1}{2y}\right] + \left[(2 - 2k)z + \frac{9}{z}\right].$$

Đây chỉ là quá trình “thử nghiệm” nên tạm coi như $(2 - 3k)$, $(4 - 4k)$ và $(2 - 2k)$ đều không âm, khi đó:

$$P \geq 14k + 2\sqrt{(2-3k)x \cdot \frac{2}{x}} + 2\sqrt{(4-4k)y \cdot \frac{1}{2y}} + 2\sqrt{(2-2k)z \cdot \frac{9}{z}}$$

$$= 14k + 2\sqrt{2(2-3k)} + 8\sqrt{2-2k}.$$

Dấu “=” xảy ra khi:
$$\begin{cases} 3x + 4y + 2z = 14 \\ (2-3k)x = \frac{2}{x} \\ (4-4k)y = \frac{1}{2y} \\ (2-2k)z = \frac{9}{z} \end{cases} \quad (*)$$

Bằng cách rút x, y, z theo k và thay vào (*) ta được:

$$3\sqrt{\frac{2}{2-3k}} + 4\sqrt{\frac{1}{2(4-4k)}} + 2\sqrt{\frac{9}{2-2k}} = 14$$

$$3\sqrt{\frac{2}{2-3k}} + \frac{8}{\sqrt{2-2k}} = 14.$$

Sử dụng máy tính cầm tay giải phương trình này sẽ tìm được $k = \frac{1}{2}$.

Khi đó ta có phân tích: $P = 2(x + 2y + z) + \frac{2}{x} + \frac{1}{2y} + \frac{9}{z}$

$$= \frac{1}{2}(3x + 4y + 2z) + \left(\frac{x}{2} + \frac{2}{x}\right) + \left(2y + \frac{1}{2y}\right) + \left(z + \frac{9}{z}\right).$$

Theo bất đẳng thức Cauchy thì:

$$\frac{x}{2} + \frac{2}{x} \geq 2\sqrt{\frac{x}{2} \cdot \frac{2}{x}} = 2; \quad 2y + \frac{1}{2y} \geq 2\sqrt{2y \cdot \frac{1}{2y}} = 2 \text{ và } z + \frac{9}{z} \geq 2\sqrt{z \cdot \frac{9}{z}} = 6.$$

Do đó: $P \geq \frac{1}{2} \cdot 14 + 2 + 2 + 6 = 17.$

Dấu “=” xảy ra khi $x = 2; y = \frac{1}{2}$ và $z = 3$. Bài toán được chứng minh.

Bài toán 1.3. (Đề minh họa của Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội cho kỳ thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT năm học 2024 – 2025, kèm theo quyết định số 994/QĐ-SGDĐT ngày 24/04/2024)

Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn: $a + b = 2$.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{a^2 + b^2 + 1} + \frac{2}{3ab} \geq 1.$

Phần II. PHƯƠNG PHÁP TÌM GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT, GIÁ TRỊ LỚN NHẤT

Đây là một trong những dạng bài toán khó của chương trình toán phổ thông. Để làm tốt phần này học sinh cần nắm vững quy tắc sau:

1. Tìm giá trị nhỏ nhất (GTNN) của biểu thức $F(x, y, z, \dots)$:

Bước 1: Tìm được số thực A (cận dưới) mà $F(x, y, z, \dots) \geq A$ với mọi $x, y, z, \dots$

Bước 2: Chỉ ra ít nhất một bộ $(x_0, y_0, z_0, \dots)$ để $F(x_0, y_0, z_0, \dots) = A$

Bước 3: Kết luận GTNN của biểu thức $F(x, y, z, \dots)$ là A .

2. Tìm giá trị lớn nhất (GTLN) của biểu thức $G(x, y, z, \dots)$:

Bước 1: Tìm được số thực B (cận trên) mà $G(x, y, z, \dots) \leq B$ với mọi $x, y, z, \dots$

Bước 2: Chỉ ra ít nhất một bộ $(x_0, y_0, z_0, \dots)$ để $G(x_0, y_0, z_0, \dots) = B$

Bước 3: Kết luận GTLN của biểu thức $G(x, y, z, \dots)$ là B .

Trước khi đi vào chi tiết từng phương pháp, chúng ta cùng theo dõi bài toán đơn giản sau:

Cho x, y là các số thực thỏa mãn $x^2 - x + y^2 = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của biểu thức: $P = x - 2y + 1$.

Phân tích hướng giải và bình luận:

Ta biến đổi: $P = x - 2y + 1 = x - 2y - 1 + 2 = x - 2y - 1 + x^2 - x + y^2$
 $= x^2 + y^2 - 2y - 1 = x^2 + (y - 1)^2 - 2$.

Vì $x^2 \geq 0$ và $(y - 1)^2 \geq 0$ nên $x^2 + (y - 1)^2 - 2 \geq -2$ hay $P \geq -2$.

Dấu “=” xảy ra khi $x = 0$; $y = 1$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P là -2 .

Mặt khác: $P = x - 2y + 1 = x - 2y + 3 - 2 = x - 2y + 3 - (x^2 - x + y^2)$
 $= -x^2 - y^2 + 2x - 2y + 3 = -(x - 1)^2 - (y + 1)^2 + 5$.

Vì $-(x - 1)^2 \leq 0$ và $-(y + 1)^2 \leq 0$ nên $-(x - 1)^2 - (y + 1)^2 + 5 \leq 5$
hay $P \leq 5$.

Dấu “=” xảy ra khi $x = 1$; $y = -1$. Vậy giá trị lớn nhất của P là 5 .

Thực tế lời giải trên chưa chính xác bởi lẽ $x = 0; y = 1$ và $x = 1; y = -1$ đều không thỏa mãn điều kiện ràng buộc ban đầu: $x^2 - x + y^2 = 2$. Thậm chí tại $x = 0; y = 1$ thì $P \neq -2$ và tại $x = 1; y = -1$ thì $P \neq 5$.

Lời giải đúng sẽ như sau:

Từ $P = x - 2y + 1 \Rightarrow x = 2y + P - 1 = 2y + Q$ (với $Q = P - 1$), thay vào điều kiện ban đầu ta được:

$$(2y + Q)^2 - (2y + Q) + y^2 = 2$$

$$5y^2 + 2y(2Q - 1) + Q^2 - Q - 2 = 0.$$

Ta coi đây là phương trình bậc hai ẩn y , để phương trình này có nghiệm thì:

$$\Delta' \geq 0 \Rightarrow (2Q - 1)^2 - 5(Q^2 - Q - 2) \geq 0$$

$$-Q^2 + Q + 11 \geq 0 \Rightarrow \frac{1 - 3\sqrt{5}}{2} \leq Q \leq \frac{1 + 3\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \frac{3 - 3\sqrt{5}}{2} \leq P \leq \frac{3 + 3\sqrt{5}}{2}.$$

$$\odot \text{ Dấu "=" xảy ra bên trái khi: } y = -\frac{2Q - 1}{5} = \frac{3\sqrt{5}}{5}; x = 2y + Q = \frac{5 - 3\sqrt{5}}{10}.$$

$$\odot \text{ Dấu "=" xảy ra bên phải khi: } y = -\frac{2Q - 1}{5} = \frac{-3\sqrt{5}}{5}; x = 2y + Q = \frac{5 + 3\sqrt{5}}{10}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{3 - 3\sqrt{5}}{2}$ và giá trị lớn nhất của P là $\frac{3 + 3\sqrt{5}}{2}$.

Ngoài phương pháp miền giá trị như trên, các em có thể giải theo nhiều cách khác như: sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki, sử dụng hình học (vị trí tương đối giữa đường thẳng và đường tròn), nhân tử Lagrange...

Qua ví dụ này, tác giả chỉ muốn nhấn mạnh rằng: Trong quá trình tìm giá trị nhỏ nhất; giá trị lớn nhất phải thật cẩn trọng, nếu thiếu hoặc lỗi một trong các bước nêu trên thì lời giải không đầy đủ, thậm chí cho kết quả sai.

Về nguyên tắc, chỉ cần tìm ra một bộ $(x_0, y_0, z_0, \dots)$ để dấu "=" xảy ra nhưng nếu học sinh tìm được tất cả thì lời giải bài toán sẽ trọn vẹn hơn.

Bài toán 2.1. Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn điều kiện: $3a^2 + 2ab + b^2 \leq 12$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $S = \frac{-4a^2b - ab^2 + 3a + 2b}{ab}$.

Phân tích hướng giải và bình luận:

Nhận xét: Với các số thực a, b, c thỏa mãn $a + b + c > 0$ và đa thức hai biến x, y xác định bởi $P(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$, khi đó luôn tìm được các hằng số m, n, p để $P(x, y) = (mx + ny)^2 + p(x - y)^2$.

Chúng ta có thể tìm các hệ số đó thông qua phương pháp hệ số bất định như ở trên đã làm. Tuy nhiên trong bài toán này, để đơn giản các em cũng có thể thực hiện như sau:

$$3a^2 + 2ab + b^2 = (ma + nb)^2 + p(a - b)^2$$

$$\Rightarrow 3a^2 + 2ab + b^2 - p(a - b)^2 = (ma + nb)^2$$

$$\Rightarrow (3 - p)a^2 + 2(1 + p)ab + (1 - p)b^2 = (ma + nb)^2.$$

Để $(3 - p)a^2 + 2(1 + p)ab + (1 - p)b^2$ là một bình phương đúng thì:

$$\Delta' = (1 + p)^2 - (3 - p)(1 - p) = 0$$

$$\Rightarrow 6p - 2 = 0 \Rightarrow p = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Do đó: } (ma + nb)^2 = \frac{8}{3}a^2 + \frac{8}{3}ab + \frac{2}{3}b^2 = \frac{2}{3}(2a + b)^2.$$

$$\text{Như vậy: } 3a^2 + 2ab + b^2 = \frac{2}{3}(2a + b)^2 + \frac{1}{3}(a - b)^2.$$

Kết hợp với giả thiết:

$$3a^2 + 2ab + b^2 \leq 12 \Rightarrow 12 \geq \frac{2}{3}(2a + b)^2 + \frac{1}{3}(a - b)^2 \geq \frac{2}{3}(2a + b)^2$$

$$\Rightarrow (2a + b)^2 \leq 18 \Rightarrow 0 < 2a + b \leq 3\sqrt{2}.$$

Dấu “=” xảy ra tại $a = b = \sqrt{2}$.

$$\text{Khi đó: } S = \frac{-4a^2b - ab^2 + 3a + 2b}{ab} = \frac{2}{a} + \frac{3}{b} - 4a - b.$$

Ta sẽ đi tìm các hằng số α và β sao mà tại $a = b = \sqrt{2}$ thì:

$$\begin{cases} \frac{2}{a} = \alpha a \\ \frac{3}{b} = \beta b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{2}{a^2} = 1 \\ \beta = \frac{3}{b^2} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Dựa trên cơ sở này các em biến đổi biểu thức S :

$$S = \frac{2}{a} + \frac{3}{b} - 4a - b = \left(\frac{2}{a} + a\right) + \left(\frac{3}{b} + \frac{3}{2}b\right) - 4a - b - a - \frac{3}{2}b$$

$$= \left(\frac{2}{a} + a\right) + \left(\frac{3}{b} + \frac{3}{2}b\right) - 5a - \frac{5}{2}b = \left(\frac{2}{a} + a\right) + 3\left(\frac{1}{b} + \frac{b}{2}\right) - \frac{5}{2}(2a + b).$$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\frac{2}{a} + a \geq 2\sqrt{\frac{2}{a} \cdot a} = 2\sqrt{2} \quad \text{và} \quad \frac{1}{b} + \frac{b}{2} \geq 2\sqrt{\frac{1}{b} \cdot \frac{b}{2}} = \sqrt{2}.$$

Kết hợp với $2a + b \leq 3\sqrt{2}$ suy ra:

$$S \geq 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - \frac{5}{2} \cdot 3\sqrt{2} = -\frac{5\sqrt{2}}{2}. \text{ Dấu "=" xảy ra khi } a = b = \sqrt{2}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của S là $-\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

Bài toán 2.2. Cho a, b là các số thực thỏa mãn: $5a^2 - 6ab + 2b^2 = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của biểu thức: $M = 10a - 7b + 1$.

Phân tích hướng giải và bình luận:

Cũng như các bài toán trước, ta phân tích $5a^2 - 6ab + 2b^2 = 1$ thành:

$$(2a - b)^2 + (a - b)^2 = 1. \text{ Khi đó:}$$

$$M = 10a - 7b + 1 = 3(2a - b) + 4(a - b) + 1$$

$$\Rightarrow M - 1 = 3(2a - b) + 4(a - b).$$

Sử dụng Bất đẳng thức Bunhiacopxki ta được:

$$(M - 1)^2 = [3(2a - b) + 4(a - b)]^2$$

$$\leq (3^2 + 4^2)[(2a - b)^2 + (a - b)^2] = 25$$

$$\Rightarrow -5 \leq M - 1 \leq 5 \Rightarrow -4 \leq M \leq 6. \text{ Ta tìm điều kiện để dấu "=" xảy ra:}$$

$$\odot M = -4 \text{ khi: } \begin{cases} \frac{2a-b}{3} = \frac{a-b}{4} \\ (2a-b)^2 + (a-b)^2 = 1 \\ 10a - 7b + 1 = -4 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{5}; b = 1.$$

$$\odot M = 6 \text{ khi: } \begin{cases} \frac{2a-b}{3} = \frac{a-b}{4} \\ (2a-b)^2 + (a-b)^2 = 1 \\ 10a - 7b + 1 = 6 \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{1}{5}; b = -1.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của M là -4 và giá trị lớn nhất của M là 6 .

Phân tích hướng giải và bình luận:

Đặt $S = \frac{1}{a^2 + b^2 + 1} + \frac{2}{3ab}$, thường với dạng toán đối xứng như thế này ta dự đoán dấu đẳng thức xảy ra “tại tâm” $a = b = 1$. Hơn nữa đây là bất đẳng thức có chứa mẫu nên học sinh có thể nghĩ đến việc sử dụng Cauchy – Schwartz dạng Engel. Phòng trường hợp không được áp dụng trực tiếp bất đẳng thức trên, chúng ta sẽ chứng minh lại thông qua bổ đề sau:

Bổ đề: Cho a, b là các số thực và x, y là các số thực dương. Khi đó:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}. \text{ Dấu “=” xảy ra khi } \frac{a}{x} = \frac{b}{y}.$$

Chứng minh:

Ta sẽ chứng minh trực tiếp bằng cách xét hiệu:

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} - \frac{(a+b)^2}{x+y} &= \frac{a^2y + b^2x}{xy} - \frac{(a+b)^2}{x+y} = \frac{(x+y)(a^2y + b^2x) - xy(a+b)^2}{xy(x+y)} \\ &= \frac{a^2xy + x^2b^2 + y^2a^2 + b^2xy - (a^2xy + 2abxy + b^2xy)}{xy(x+y)} = \frac{(bx - ay)^2}{xy(x+y)}. \end{aligned}$$

Do $x, y > 0$ và $(bx - ay)^2 \geq 0$ nên $\frac{(bx - ay)^2}{xy(x+y)} \geq 0$.

Do đó $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} - \frac{(a+b)^2}{x+y} \geq 0$ hay $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}$.

Dấu “=” xảy ra khi $bx - ay = 0 \Rightarrow bx = ay$ hay $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$.

Bổ đề được chứng minh.

Lưu ý: Bằng cách sử dụng kết quả này học sinh có thể chứng minh cho trường hợp với ba bộ số hoặc nhiều hơn thế: Cho a, b, c là các số thực và x, y, z là các số thực dương. Khi đó:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}. \text{ Dấu “=” xảy ra khi } \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}.$$

Thật vậy:

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} = \left(\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \right) + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{[(a+b)+c]^2}{(x+y)+z}$$

$$\text{hay } \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}. \text{ Dấu "=" xảy ra khi: } \begin{cases} \frac{a}{x} = \frac{b}{y} \\ \frac{a+b}{x+y} = \frac{c}{z} \end{cases}$$

Kết hợp sử dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta được $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$.

Trong chương trình toán phổ thông, các em tạm hiểu đơn giản “bổ đề” là một giả thuyết đã được chứng minh hoặc chắc chắn sẽ được chứng minh, dùng làm cơ sở để từ đó giải quyết cho bài toán đang làm.

Trở lại bài toán:

Ta sẽ cố gắng biến đổi bằng cách tách $\frac{2}{3ab}$ về dạng tổng hai phân thức sao mà một trong hai phân thức có mẫu là $2ab$ với mục đích là để sau khi cộng với thành phần $\frac{1}{a^2 + b^2 + 1}$ của phân số $\frac{1}{a^2 + b^2 + 1}$ tạo ra tổng $(a+b)^2 = 4$, từ đó xử lý được biểu thức “phức tạp” này. Phân thức còn lại chứa mẫu $a.b$ thì đánh giá tương đối đơn giản dựa theo bất đẳng thức Cauchy cổ điển.

Để làm được như thế, trước hết chúng ta đi tìm hệ số α để tại $a = 1$ và $b = 1$ thì: $\frac{1}{a^2 + b^2 + 1} = \frac{\alpha}{2ab} \Rightarrow \alpha = \frac{2ab}{a^2 + b^2 + 1} = \frac{2}{3}$.

$$\text{Khi đó: } S = \frac{1}{a^2 + b^2 + 1} + \frac{2}{3ab} = \left[\frac{1^2}{a^2 + b^2 + 1} + \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{2ab} \right] + \frac{4}{9ab}.$$

Sử dụng bổ đề trên ta có:

$$\frac{1^2}{a^2 + b^2 + 1} + \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{2ab} \geq \frac{\left(1 + \frac{2}{3}\right)^2}{a^2 + b^2 + 1 + 2ab} = \frac{\left(1 + \frac{2}{3}\right)^2}{(a+b)^2 + 1} = \frac{\left(1 + \frac{2}{3}\right)^2}{2^2 + 1} = \frac{5}{9}.$$

Theo bất đẳng thức Cauchy thì: $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = 1$ nên $\frac{4}{9ab} \geq \frac{4}{9}$.

$$\text{Do vậy: } S \geq \frac{5}{9} + \frac{4}{9} = 1.$$

Dấu “=” xảy ra khi $a = b = 1$. Bài toán được chứng minh.

Hoặc theo một cách khác, để ý rằng tại $a = b = 1$ thì $a^2 + b^2 + 1 = 3ab = 3$, khi đó có thể tách $\frac{2}{3ab} = \frac{1}{3ab} + \frac{1}{3ab}$ và sử dụng bất đẳng thức cộng mẫu với bộ ba số như sau:

$$S = \frac{1}{a^2 + b^2 + 1} + \frac{2}{3ab} = \frac{1^2}{a^2 + b^2 + 1} + \frac{1^2}{3ab} + \frac{1^2}{3ab}$$

$$\geq \frac{9}{a^2 + 2ab + b^2 + 6ab + 1} = \frac{9}{(a+b)^2 + 4ab + 1} = \frac{9}{5 + 4ab} \geq \frac{9}{5 + 4 \cdot 1} = 1.$$

Dấu “=” xảy ra khi $a = b = 1$. Chúng ta cũng thu được kết quả tương tự.

Trong trường hợp không muốn dùng các bất đẳng thức phụ, học sinh hoàn toàn có thể sử dụng phương pháp chứng minh trực tiếp:

$$S = \frac{1}{a^2 + b^2 + 1} + \frac{2}{3ab} = \frac{1}{(a+b)^2 - 2ab + 1} + \frac{2}{3ab} = \frac{1}{5 - 2ab} + \frac{2}{3ab}.$$

Đổi biến $t = ab$ (với $0 < t \leq 1$). Khi đó $S(t) = \frac{1}{5 - 2t} + \frac{2}{3t}$ và ta xét hiệu:

$$S(t) - 1 = \frac{1}{5 - 2t} + \frac{2}{3t} - 1 = \frac{6t^2 - 16t + 10}{3t(5 - 2t)} = \frac{2(3t^2 - 8t + 5)}{3t(5 - 2t)} = \frac{2(t - 1)(3t - 5)}{3t(5 - 2t)}.$$

$$\text{Với } 0 < t \leq 1 \text{ thì } \begin{cases} t - 1 \leq 0 \\ 3t - 5 \leq 0 \\ 5 - 2t \geq 0 \end{cases} \text{ nên } \frac{2(t - 1)(3t - 5)}{3t(5 - 2t)} \geq 0.$$

Do đó $S(t) - 1 \geq 0$ hay $S \geq 1$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $t = 1$ hay $a = b = 1$.

Như vậy:

Trong mỗi cuộc thi: Học sinh nên tìm hiểu kỹ quy chế trước khi làm bài: những gì được làm, được áp dụng, những gì nếu sử dụng phải chứng minh... để tránh mất điểm đáng tiếc!

Trong quá trình học: Với mỗi bài toán, nếu có thời gian các em hãy cố gắng suy nghĩ để tìm ra nhiều hướng đi, cách giải khác nhau và kết hợp tổng quát hóa nếu có thể. Học sâu được như thế sẽ rất hữu ích bởi trong tay có nhiều công cụ, giải pháp thì khi gặp các bài toán khác cơ hội để bạn giải quyết được chúng sẽ lớn hơn.

Bài toán 1.4. (Đề thi Olympic trại hè Hùng Vương lần thứ 19, môn Toán lớp 10, ngày 06 tháng 08 năm 2025)

Cho x, y là các số thực thỏa mãn điều kiện: $0 \leq x \leq 1$ và $0 \leq y \leq 1$.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{2+x} + \frac{1}{2+y} \leq \frac{2}{2+\sqrt{xy}}.$

Phân tích hướng giải và bình luận:

Ta sẽ sử dụng phương pháp chứng minh trực tiếp để giải bài toán này, tuy nhiên để việc phân tích đa thức thành nhân tử được dễ dàng thì các em có thể đổi biến: $x = a^2, y = b^2$ với $0 \leq a; b \leq 1$.

$$\begin{aligned}\text{Khi đó hiệu: } & \frac{1}{2+x} + \frac{1}{2+y} - \frac{2}{2+\sqrt{xy}} = \frac{1}{2+a^2} + \frac{1}{2+b^2} - \frac{2}{2+ab} \\ &= \frac{(2+a^2)(2+ab) + (2+b^2)(2+ab) - 2(2+a^2)(2+b^2)}{(2+a^2)(2+b^2)(2+ab)} \\ &= \frac{a^3b + b^3a - 2a^2b^2 - 2a^2 - 2b^2 + 4ab}{(2+a^2)(2+b^2)(2+ab)} = \frac{ab(a^2 - 2ab + b^2) - 2(a^2 - 2ab + b^2)}{(2+a^2)(2+b^2)(2+ab)} \\ &= \frac{(ab-2)(a-b)^2}{(2+a^2)(2+b^2)(2+ab)}.\end{aligned}$$

Với $0 \leq a, b \leq 1$ thì $ab - 2 < 0$, do đó $\frac{(ab-2)(a-b)^2}{(2+a^2)(2+b^2)(2+ab)} \leq 0$.

Suy ra: $\frac{1}{2+a^2} + \frac{1}{2+b^2} \leq \frac{2}{2+ab}$ hay $\frac{1}{2+x} + \frac{1}{2+y} \leq \frac{2}{2+\sqrt{xy}}$.

Dấu “=” xảy ra khi $x = y$. Bài toán được chứng minh.

Bài toán 1.5. Cho m, n là hai nghiệm thực khác nhau của phương trình:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \text{ (với } a \neq 0\text{)}. \text{ Chứng minh rằng: } mn \geq \frac{3ac - b^2}{3a^2}.$$

Phân tích hướng giải và bình luận:

Vì m, n là hai nghiệm của phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ nên:

$$\begin{cases} am^3 + bm^2 + cm + d = 0 & (1) \\ an^3 + bn^2 + cn + d = 0 & (2) \end{cases}$$

Trừ theo vế của (1) và (2) ta được:

$$a(m^3 - n^3) + b(m^2 - n^2) + c(m - n) = 0$$

$$\Rightarrow (m - n)[a(m^2 + mn + n^2) + b(m + n) + c] = 0.$$

Vì $m \neq n$ nên phải có: $a(m^2 + mn + n^2) + b(m + n) + c = 0$

$$\Rightarrow a[(m + n)^2 - mn] + b(m + n) + c = 0$$

$$\Rightarrow a(m + n)^2 + b(m + n) + c - amn = 0.$$

Ta coi đây là phương trình bậc hai ẩn $(m + n)$. Để phương trình có nghiệm thì:

$$\Delta \geq 0 \text{ hay là } b^2 - 4a(c - amn) \geq 0.$$

$$\text{Khi đó: } b^2 - 3a(c - amn) \geq 0$$

$$\Rightarrow b^2 - 3ac + 3a^2mn \geq 0 \Rightarrow 3a^2mn \geq 3ac - b^2$$

$$\Rightarrow mn \geq \frac{3ac - b^2}{3a^2}. \text{ Bài toán được chứng minh.}$$

Lưu ý: Thực tế thì bài toán này muốn nhắc tới một biến thể được suy ra từ điều kiện để phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có nghiệm.

⊙ Nếu $a.c < 0$ thì hiển nhiên $b^2 - 3ac > 0$.

⊙ Nếu $a.c \geq 0$ khi đó $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0 \Rightarrow b^2 - 3ac \geq b^2 - 4ac \geq 0$.

Có một số bài toán sử dụng tính chất trên, do vậy các em cũng nên để tâm.

Bài toán 1.6. Cho các số thực dương x, y thỏa mãn điều kiện:

$$2x^2 + 2xy + y^2 - 2x \leq 8. \text{ Chứng minh rằng: } \frac{2}{x} + \frac{4}{y} - 2x - 3y \geq -4.$$

Phân tích hướng giải và bình luận:

Cũng tương tự như những bài toán trên, chúng ta khai thác giả thiết ban đầu như sau: $2x^2 + 2xy + y^2 - 2x \leq 8$

$$\Rightarrow x^2 + 2xy + y^2 + x^2 - 2x + 1 \leq 9$$

$$\Rightarrow (x + y)^2 + (x - 1)^2 \leq 9$$

$$\Rightarrow (x + y)^2 \leq 9 - (x - 1)^2.$$

$$\text{Vì } (x - 1)^2 \geq 0 \text{ nên } (x + y)^2 \leq 9 \Rightarrow 0 < x + y \leq 3.$$

Dự đoán dấu “=” xảy ra khi $x = 1$ và $y = 2$ dẫn đến việc phải đi xác định các hệ số α, β để tại $x = 1$ và $y = 2$ thì:

$$\begin{cases} \frac{2}{x} = \alpha x \\ \frac{4}{y} = \beta y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{1} = \alpha \\ \frac{4}{2} = 2\beta \end{cases} \Rightarrow \alpha = 2 \text{ và } \beta = 1.$$

$$\text{Từ đó phân tích: } \frac{2}{x} + \frac{4}{y} - 2x - 3y = \left(\frac{2}{x} + 2x\right) + \left(\frac{4}{y} + y\right) - 4(x + y).$$

Phần III. HỆ THỨC VIÈTE VÀ ỨNG DỤNG

Định lý Viète (Vi-ét) được gọi theo tên của nhà toán học người Pháp François Viète, là một hệ thức quan trọng liên quan đến các nghiệm của một đa thức. Trong chương trình lớp 9 học sinh chủ yếu nghiên cứu đối với phương trình bậc hai. Các dạng toán liên quan rất nhiều như: tính giá trị biểu thức, mối liên hệ giữa các nghiệm, tìm giá trị lớn nhất nhỏ nhất của biểu thức nghiệm, dấu các nghiệm... và cũng có những bài không hề dễ, đặc biệt liên quan đến các hệ thức bất đối xứng với việc sử dụng Viète một phần. Trước hết chúng ta cùng nhau nhắc lại một số kiến thức cơ bản:

⊙ **Định lý Viète thuận:** Cho phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)

có hai nghiệm x_1, x_2 khi đó:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

Hệ quả: Cho phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)

* Nếu $a + b + c = 0$ thì phương trình có hai nghiệm $x_1 = 1; x_2 = -\frac{c}{a}$

* Nếu $a - b + c = 0$ thì phương trình có hai nghiệm $x_1 = -1; x_2 = -\frac{c}{a}$

* Phương trình có hai nghiệm trái dấu khi tích $a.c < 0$.

Ngoài ra nếu phương trình có hai nghiệm cùng dấu thì $a.c > 0$ và cùng dấu dương thì thêm $-\frac{b}{a} > 0$, cùng dấu âm thì thêm $-\frac{b}{a} < 0$.

Lưu ý: Điều kiện để áp dụng định lý Viète là phương trình phải có nghiệm nên khi giải toán ta cần phải xác định điều kiện này trước (trừ khi $a.c < 0$ thì khi đó $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ hiển nhiên phương trình có nghiệm). Trong trường hợp biểu thức Delta phức tạp, học sinh không cần tìm điều kiện cụ thể của tham số để $\Delta \geq 0$, các em cứ làm trước rồi thử trực tiếp để đưa ra kết luận.

⊙ **Định lý Viète đảo:** Giả sử x_1, x_2 là hai số thực thỏa mãn hệ thức:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = S \\ x_1 x_2 = P \end{cases}$$

Khi đó x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình bậc hai: $x^2 - Sx + P = 0$.

Lưu ý: Điều kiện để tồn tại x_1, x_2 là $S^2 - 4P \geq 0$ (chính là điều kiện $\Delta \geq 0$ để phương trình trên có nghiệm).

☉ Một số biến đổi cơ bản cần ghi nhớ

1) $ax_1^2 + bx_1 + c = 0$.

2) $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = S^2 - 2P$.

3) $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = S^3 - 3SP$.

4) $x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2x_2^2 = (S^2 - 2P)^2 - 2S^2$.

5) $(x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha) = x_1x_2 - \alpha(x_1 + x_2) + \alpha^2 = P - \alpha S + \alpha^2$.

6) $x_1^2x_2 + x_2^2x_1 = x_1x_2(x_1 + x_2) = SP$.

7) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = \frac{S}{P}$.

8) $\frac{1}{x_1 - \alpha} + \frac{1}{x_2 - \alpha} = \frac{x_1 + x_2 - 2\alpha}{(x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha)} = \frac{S - 2\alpha}{P - \alpha S + \alpha^2}$.

9) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1x_2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{x_1x_2} = \frac{S^2 - 2P}{P}$.

10) $|x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{S^2 - 4P}$.

Với các biểu thức bất đối xứng chúng ta không có công thức biến đổi chung nào, nó phải tùy thuộc vào từng bài toán cụ thể.

Tuy nhiên các em hãy đặc biệt để ý đến “*hệ quả của định lý Viète*” ở trên, nghĩa là cần kiểm tra $(a + b + c)$ hay $(a - b + c)$ xem chúng có bằng không hay không trước khi nghĩ tới việc dùng Delta. Nếu không được nữa thì quay trở lại phân tích chính cái biểu thức ở đề bài (ví dụ phân tích thành nhân tử, đánh giá bất đẳng thức, ...) với hi vọng tìm ra được mối quan hệ đơn giản hơn giữa các nghiệm của phương trình.

Bây giờ chúng ta sẽ đi vào giải quyết một số dạng bài tập cụ thể từ đơn giản đến phức tạp.

3.1. TÍNH GIÁ TRỊ BIỂU THỨC

Bài toán 3.1.1. (Đề minh họa của Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội cho kỳ thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT, theo Chương trình GDPT 2018, kèm thông báo số 2998/TB-SGDĐT ngày 28/08/2024)

Biết rằng phương trình bậc hai $x^2 - 3x + a = 0$ có một nghiệm $x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$.

Tính tổng bình phương hai nghiệm của phương trình trên.

Phân tích hướng giải và bình luận:

Vì $x_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ là một nghiệm của phương trình nên chắc chắn phương trình sẽ còn một nghiệm x_2 nữa. Theo định lý Viète thì:

$$x_1 + x_2 = 3 \text{ suy ra } x_2 = 3 - x_1 = 3 - \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó: } A &= x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 \\ &= \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2} + \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \cdot \frac{3 + \sqrt{5}}{2} = 9 - 2 = 7. \end{aligned}$$

Vậy giá trị tổng bình phương hai nghiệm của phương trình đã cho là 7.

Ngoài ra các em cũng có thể tìm tham số a và giải bài toán theo một cách khác như sau:

Vì $x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ là nghiệm của phương trình nên:

$$\left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{3 - \sqrt{5}}{2} + a = 0$$

$$a = 3 \cdot \frac{3 - \sqrt{5}}{2} - \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{9 - 3\sqrt{5}}{2} - \frac{14 - 6\sqrt{5}}{4} = \frac{9 - 3\sqrt{5} - 7 + 3\sqrt{5}}{2} = 1.$$

Theo định lý Viète thì: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 x_2 = 1 \end{cases}$

$$\text{Do đó: } A = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 3^2 - 2 = 7.$$

Ta cũng thu được kết quả như trên.

Bài toán 3.1.2. Biết rằng phương trình $x^2 - mx - m^2 - 1 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1| - |x_2| = 3$ và $x_1 < x_2$.

Tính giá trị của biểu thức: $A = x_1^2 + x_2^2$.

Phân tích hướng giải và bình luận:

Xét phương trình $x^2 - mx - m^2 - 1 = 0$. (1)

Ta có: $\Delta = m^2 + 4(m^2 + 1) = 5m^2 + 4 > 0$ với mọi m .

Do vậy phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt.

Theo định lý Viète: $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 x_2 = -m^2 - 1 \end{cases}$ (2)

Do $-m^2 - 1 < 0$ suy ra x_1 và x_2 trái dấu.

Kết hợp với $x_1 < x_2$ ta được $x_1 < 0 < x_2$. Khi đó:

$$|x_1| - |x_2| = 3$$

$$-x_1 - x_2 = 3 \text{ hay } x_1 + x_2 = -3.$$

Thay vào (2) ta được $m = -3$. Khi đó: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -3 \\ x_1 x_2 = -10 \end{cases}$

$$\text{Suy ra: } A = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = (-3)^2 - 2(-10) = 29.$$

Vậy $A = 29$.

Bài toán 3.1.3. (Đề thi vào lớp 10 THPT TP. Hồ Chí Minh, dành cho học sinh thi vào các lớp chuyên Toán, năm học 2024 - 2025)

Cho tập nghiệm của phương trình $(x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)(x^2 + ex + f) = 0$ là $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Tính giá trị của biểu thức:

$$T = a^2 + c^2 + e^2 - 2(b + d + f).$$

Phân tích hướng giải và bình luận:

Vì x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $x^2 + ax + b = 0$ nên theo định lý Viète

$$\text{thì: } \begin{cases} x_1 + x_2 = -a \\ x_1 x_2 = b \end{cases} \Rightarrow a^2 - 2b = x_1^2 + x_2^2.$$

Tương tự gọi x_3, x_4 và x_5, x_6 lần lượt là các nghiệm của các phương trình:

$x^2 + cx + d = 0$ và $x^2 + ex + f = 0$ ta cũng có:

$$c^2 - 2d = x_3^2 + x_4^2 \text{ và } e^2 - 2f = x_5^2 + x_6^2.$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra: } T &= a^2 + c^2 + e^2 - 2(b + d + f) = (a^2 - 2b) + (c^2 - 2d) + (e^2 - 2f) \\ &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 = 91. \end{aligned}$$

Vậy $T = 91$.

Bài toán 3.1.4. Biết rằng phương trình $2x^2 - 3x - 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức:

$$A = (4x_1^2 - 7x_1 - 1)^2 + (4x_2^2 - 7x_2 - 1)^2.$$

Phân tích hướng giải và bình luận:

Khi gặp các bài toán dạng này chúng ta nên tận dụng các biến đổi cơ bản trên để hạ bậc của các biểu thức trong ngoặc trước khi khai triển bình phương.

Vì x_1 là nghiệm của phương trình $2x^2 - 3x - 1 = 0$ nên:

$$2x_1^2 - 3x_1 - 1 = 0$$

$$4x_1^2 - 6x_1 - 2 = 0$$

$$4x_1^2 - 7x_1 = -x_1 + 2 \Rightarrow 4x_1^2 - 7x_1 - 1 = -x_1 + 1.$$

$$\text{Tương tự cũng có: } 4x_2^2 - 7x_2 - 1 = -x_2 + 1.$$

$$\text{Do đó: } A = (4x_1^2 - 7x_1 - 1)^2 + (4x_2^2 - 7x_2 - 1)^2$$

$$= (-x_1 + 1)^2 + (-x_2 + 1)^2$$

$$= x_1^2 + x_2^2 - 2(x_1 + x_2) + 2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) + 2.$$

$$\text{Theo định lý Viète thì: } \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{3}{2} \\ x_1x_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Thay vào } A \text{ ta được: } A = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) + 2$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2\left(-\frac{1}{2}\right) - 2 \cdot \frac{3}{2} + 2 = \frac{9}{4}. \text{ Vậy chúng ta kết luận: } A = \frac{9}{4}.$$

Phần IV. PHƯƠNG TRÌNH, HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Trong một số đề thi bài toán nhằm “phân loại học sinh” ở dạng phương trình hoặc hệ phương trình nhưng ẩn chứa phía sau nó thường là một bất đẳng thức. Tư tưởng chung để giải quyết chúng là dựa vào các bất đẳng thức cơ bản hoặc cổ điển như Cauchy, Bunhiacopxki, Minkowski, ... hoặc tính đồng biến nghịch biến của hàm số, có thể kết hợp với nhân liên hợp, đánh giá miền nghiệm, ... để so sánh các vế và đưa ra kết luận nghiệm của phương trình, hệ phương trình ban đầu.

⊙ Nếu $f(x)$ là hàm đồng biến hoặc nghịch biến trên D (tập xác định) và $u(x)$ và $v(x)$ là các hàm số xác định trên D thì: $f(u(x)) = f(v(x)) \Rightarrow u(x) = v(x)$.

⊙ Nếu phương trình $f(x) = g(x)$ có $f(x)$, $g(x)$ lần lượt đồng biến và nghịch biến trên D , bằng cách nào đó ta tìm được x_0 là nghiệm của nó thì đó cũng là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

Việc giải phương trình, hệ phương trình thông qua tính đồng biến, nghịch biến của hàm số được gọi là phương pháp hàm đặc trưng. Tuy nhiên việc tìm ra các hàm số này nhiều khi không đơn giản.

Cũng như tìm điểm rơi trong các bài toán cực trị, việc “*đoán nghiệm cơ bản*” của một phương trình, hệ phương trình rất quan trọng. Nó giúp định hướng phân tích cũng như biến đổi để thu được nhân tử phù hợp hoặc tạo ra ở mỗi vế các bất đẳng thức phù hợp với điểm rơi chính là các nghiệm đó.

Với phương trình vô tỉ học sinh có thể tìm bằng cách thử trực tiếp một vài giá trị của biến sao cho phép khai căn thực hiện được dễ dàng. Ví dụ với $\sqrt{x+2}$ thì ta kiểm tra tại $x = -1$; $x = 2$; $x = 7$; ...

Ngoài ra tùy từng bài toán, các em cũng có thể nhân, chia, đặt ẩn phụ hợp lý để chuyển về phương trình đẳng cấp (phương trình có bậc của các ẩn số bằng nhau). Từ đó dễ dàng phân tích đa thức thành nhân tử để tìm nghiệm của phương trình, hệ phương trình đã cho.

4.1. PHƯƠNG TRÌNH

Bài toán 4.1.1. Giải phương trình sau: $(2x - 3)\sqrt{x + \frac{2}{x}} = x^2 - 4$.

Phân tích hướng giải và bình luận:

Xét phương trình: $(2x - 3)\sqrt{x + \frac{2}{x}} = x^2 - 4$. (1)

Điều kiện: $x > 0$.

Bằng cách chia cả hai vế của (1) cho x ta được:

$$\frac{2x - 3}{x} \sqrt{x + \frac{2}{x}} = \frac{x^2 - 4}{x}$$
$$\left(2 - \frac{3}{x}\right) \sqrt{x + \frac{2}{x}} = x - \frac{4}{x}$$
$$x + \frac{2}{x} + \left(\frac{3}{x} - 2\right) \sqrt{x + \frac{2}{x}} - \frac{6}{x} = 0. \quad (2)$$

Đến đây, sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ không hoàn toàn:

$$t = \sqrt{x + \frac{2}{x}} \text{ (với } t > 0 \text{)} \text{ ta chuyển (2) về dạng: } t^2 + \left(\frac{3}{x} - 2\right)t - \frac{6}{x} = 0. \quad (3)$$

Coi (3) là phương trình bậc hai ẩn t , ta tính:

$$\Delta = \left(\frac{3}{x} - 2\right)^2 + \frac{24}{x} = \frac{9}{x^2} + \frac{12}{x} + 4 = \left(\frac{3}{x} + 2\right)^2$$

Dễ thấy $\Delta \geq 0$ do đó phương trình (3) có hai nghiệm được xác định bởi:

$$t = \frac{-\left(\frac{3}{x} - 2\right) - \left(\frac{3}{x} + 2\right)}{2} = -\frac{3}{x} \text{ và } t = \frac{-\left(\frac{3}{x} - 2\right) + \left(\frac{3}{x} + 2\right)}{2} = 2.$$

Ta xét các trường hợp:

⊙ Trường hợp $t = -\frac{3}{x}$, khi đó với $x > 0$ thì $-\frac{3}{x} < 0$ nên $t < 0$ (loại).

⊙ Trường hợp $t = 2$, khi đó:

$$\sqrt{x + \frac{2}{x}} = 2$$

$$x + \frac{2}{x} = 4$$

$$x^2 - 4x + 2 = 0 \Rightarrow x = 2 - \sqrt{2} \text{ (thỏa mãn); } x = 2 + \sqrt{2} \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy $x = 2 - \sqrt{2}$ và $x = 2 + \sqrt{2}$ là các nghiệm của phương trình đã cho.

Lưu ý: Học sinh có thể phân tích vế trái của phương trình (2) thành nhân tử

và chuyển về dạng: $\left(\sqrt{x + \frac{2}{x}} - 2\right)\left(\sqrt{x + \frac{2}{x}} + \frac{3}{x}\right) = 0$ rồi làm tiếp tục như trên.

Bài toán 4.1.2. Giải phương trình sau: $(1 - x)(\sqrt{x + 2} + 1) = 2x^2 - 1$.

Phân tích hướng giải và bình luận:

Xét phương trình: $(1 - x)(\sqrt{x + 2} + 1) = 2x^2 - 1$.

Điều kiện: $x + 2 \geq 0$.

Ta viết lại phương trình đã cho dưới dạng sau:

$$(1 - x)(\sqrt{x + 2} + 1) = 2x^2 - 1$$

$$1 - x + (1 - x)\sqrt{x + 2} = 2x^2 - 1$$

$$(x + 2) + (1 - x)\sqrt{x + 2} - 2x^2 - 2x = 0. \quad (1)$$

Đến đây, sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ không hoàn toàn: $t = \sqrt{x + 2}$

$$(\text{với } t \geq 0) \text{ ta chuyển (1) về dạng: } t^2 + (1 - x)t - 2x^2 - 2x = 0. \quad (2)$$

Coi (2) là phương trình bậc hai ẩn t , ta tính:

$$\Delta = (1 - x)^2 + 8x^2 + 8x = 9x^2 + 6x + 1 = (3x + 1)^2.$$

Để thấy $\Delta \geq 0$ do đó phương trình (2) có hai nghiệm được xác định bởi:

$$t = \frac{x - 1 - (3x + 1)}{2} = -x - 1 \text{ và } t = \frac{x - 1 + (3x + 1)}{2} = 2x.$$

Ta xét các trường hợp:

⊙ Trường hợp $t = -x - 1$, khi đó:

$$\sqrt{x + 2} = -x - 1$$

$$x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}; x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Thử lại ta thấy chỉ có $x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ là nghiệm của phương trình đã cho.

⊙ Trường hợp $t = 2x$, khi đó:

$$\sqrt{x+2} = 2x$$

$$4x^2 - x - 2 = 0$$

$$x = \frac{1-\sqrt{33}}{8}; x = \frac{1+\sqrt{33}}{8}.$$

Thử lại ta thấy chỉ có $x = \frac{1+\sqrt{33}}{8}$ là nghiệm của phương trình đã cho.

Kết luận: $x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ và $x = \frac{1+\sqrt{33}}{8}$ là các nghiệm của phương trình ban đầu.

Bài toán 4.1.3. Giải các phương trình sau:

a) $x + \sqrt{\sqrt{x} + 3} = 3$; b) $12\sqrt{x+1} + 9 = x^2$.

Phân tích hướng giải và bình luận:

Đây là dạng toán mà nếu biến đổi thông thường sẽ dẫn đến những phương trình bậc cao, rất khó cho việc tìm nghiệm.

a) Xét phương trình: $x + \sqrt{\sqrt{x} + 3} = 3$.

Điều kiện: $x \geq 0$. Khi đó:

$$x + \sqrt{\sqrt{x} + 3} = 3$$

$$3 - x = \sqrt{\sqrt{x} + 3} \quad (1)$$

$$\Rightarrow (3 - x)^2 = \sqrt{x} + 3 \text{ hay } 3^2 - (2x + 1) \cdot 3 + x^2 - \sqrt{x} = 0. \quad (2)$$

Coi đây là phương trình bậc hai, ẩn 3 ta tính được:

$$\Delta = (2x + 1)^2 - 4(x^2 - \sqrt{x})$$

$$= 4x + 4\sqrt{x} + 1 = (2\sqrt{x} + 1)^2 > 0 \text{ với mọi } x \geq 0.$$

Do đó phương trình (2) có hai nghiệm:

$$3 = \frac{2x+1-(2\sqrt{x}+1)}{2} = x - \sqrt{x} \text{ và } 3 = \frac{2x+1+(2\sqrt{x}+1)}{2} = x + \sqrt{x} + 1.$$

Ta xét các trường hợp:

⊙ Trường hợp $3 = x - \sqrt{x}$, khi đó: $x - 3 = \sqrt{x}$. (3)

Từ (1) ta thấy $x < 3$, khi đó $x - 3 < 0 \leq \sqrt{x}$ nên phương trình (3) vô nghiệm.

⊙ Trường hợp $3 = x + \sqrt{x} + 1$, khi đó:

$$2 - x = \sqrt{x}$$

$$x + \sqrt{x} - 2 = 0$$

$$(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 1) = 0 \Rightarrow \sqrt{x} - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ (thỏa mãn);}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Trên đây là một kỹ thuật chuyển về phương trình bậc hai đặc biệt để các em tham khảo. Với bài toán này các em còn có thể giải như sau:

Đặt $t = \sqrt{x} + 3$ ($t > 0$) ta chuyển về hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + \sqrt{t} = 3 \\ \sqrt{x} + 3 = t \end{cases}$$

$$\text{Suy ra: } x + \sqrt{t} + \sqrt{x} + 3 = 3 + t \Rightarrow (\sqrt{x} + \sqrt{t})(\sqrt{x} - \sqrt{t} + 1) = 0$$

Do $\sqrt{x} + \sqrt{t} > 0$ nên $\sqrt{x} - \sqrt{t} + 1 = 0$. Thay $\sqrt{x} = t - 3$ ta được:

$$t - 3 - \sqrt{t} + 1 = 0$$

$$t - \sqrt{t} - 2 = 0$$

$$(\sqrt{t} + 1)(\sqrt{t} - 2) = 0 \Rightarrow \sqrt{t} - 2 = 0 \Rightarrow t = 4.$$

Khi đó: $\sqrt{x} + 3 = 4 \Rightarrow x = 1$ (thỏa mãn). Ta cũng thu được kết quả tương tự.

b) Điều kiện: $x + 1 \geq 0$. Khi đó:

$$12\sqrt{x+1} + 9 = x^2$$

$$3^2 + 4\sqrt{x+1} \cdot 3 - x^2 = 0. \tag{4}$$

Coi đây là phương trình bậc hai, ẩn 3. Ta tính được:

$$\Delta' = (2\sqrt{x+1})^2 + x^2 = x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2 \geq 0 \text{ với mọi } x.$$

Do đó phương trình (4) có hai nghiệm:

$$3 = -2\sqrt{x+1} - (x+2) = -2\sqrt{x+1} - x - 2$$

$$\text{và } 3 = -2\sqrt{x+1} + (x+2) = -2\sqrt{x+1} + x + 2.$$

Ta xét các trường hợp:

⊙ Trường hợp $3 = -2\sqrt{x+1} - x - 2$, khi đó:

Phần V. HÌNH HỌC

Câu hình phẳng trong đề thi tuyển sinh vào lớp 10 của các tỉnh thành thông thường có ba ý với hai ý đầu khá đơn giản. Tuy nhiên ý thứ ba (hay gọi là c – Hình) lại tương đối khó: tìm điểm cố định, chứng minh đồng quy, thẳng hàng, vuông góc, ... và thực sự là một thách thức với nhiều bạn.

Việc cung cấp đáp án chưa phải là cách tốt nhất mà quan trọng là hướng dẫn, lý giải cho các em tại sao lại làm như vậy để học sinh hình thành những suy luận có lý khi tìm hướng giải quyết một bài toán hình học.

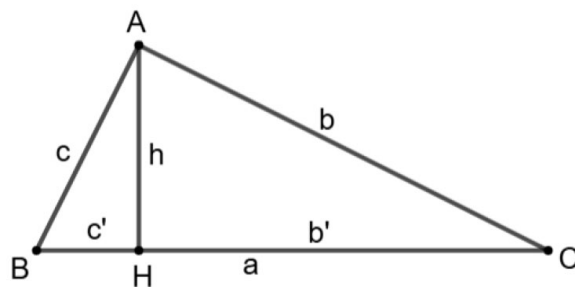
Câu chuyện còn dài ở phía sau nhưng trước hết học sinh cần biết thêm một vài công cụ bổ trợ phổ biến sau đây cũng như cách chứng minh chúng.

Lưu ý: Khi các em sử dụng các kết quả này thì tốt nhất là nên chứng minh lại.

1. Một số hệ thức về cạnh và đường cao trong tam giác vuông

Cho tam giác ABC vuông tại A, kẻ đường cao AH ($H \in BC$). Đặt $BC = a$, $AB = c$, $AC = b$, $AH = h$, $HB = c'$, $HC = b'$ (b' , c' còn gọi là độ dài hình chiếu của cạnh góc vuông lên cạnh huyền). Khi đó ta có các hệ thức sau:

- 1) $b.c = a.h$;
- 2) $b^2 = b'.a$, $c^2 = c'.a$;
- 3) $a^2 = b^2 + c^2$ (định lý Pythagoras);
- 4) $h^2 = b'.c'$;
- 5) $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$;



Chứng minh:

- 1) Sử dụng công thức tính diện tích ta có:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}b.c = \frac{1}{2}a.h \Rightarrow b.c = a.h.$$

- 2) Xét hai tam giác vuông HAB và ACB có $\widehat{B}$ chung $\Rightarrow \triangle HAB \sim \triangle ACB$

$$\Rightarrow \frac{AB}{CB} = \frac{HB}{AB} \Rightarrow AB^2 = HB.CB \text{ hay } c^2 = c'.a.$$

Tương tự cũng chỉ ra được $b^2 = b'.a$.

3) Đây là định lý Pythagoras, học sinh được sử dụng và không phải chứng minh. Tuy nhiên chúng ta cũng có thể chứng minh rất đơn giản bằng cách dựa vào kết quả đã có ở trên:

$$b^2 = b' \cdot a \text{ và } c^2 = c' \cdot a \text{ suy ra } b^2 + c^2 = b'a + c'a = a(b' + c') = a \cdot a = a^2.$$

$$4) \text{ Ta có } \widehat{ABH} + \widehat{BAH} = 90^\circ, \widehat{BAH} + \widehat{CAH} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{ABH} = \widehat{CAH}.$$

$$\text{Suy ra: } \triangle ABH \sim \triangle CAH \Rightarrow \frac{AH}{CH} = \frac{BH}{AH} \Rightarrow AH^2 = BH \cdot CH \text{ hay } h^2 = b' \cdot c'.$$

5) Ta biến đổi vế phải và sử dụng định lý Pythagoras kết hợp với kết quả

$$b \cdot c = a \cdot h \text{ đã có ở trên: } \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{b^2 + c^2}{(bc)^2} = \frac{a^2}{(a \cdot h)^2} = \frac{1}{h^2}.$$

Đến đây các hệ thức được chứng minh hoàn chỉnh.

Ngoài ra, giả thiết rằng $c \leq b$ khi đó $c' \leq b'$. Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} c' + b' = a \\ c' \cdot b' = h^2 \end{cases} \text{ suy ra } c' \text{ và } b' \text{ chính là hai nghiệm của phương trình bậc hai:}$$

$$x^2 - ax + h^2 = 0. \quad (*)$$

$$\text{Phương trình này có: } \Delta = a^2 - 4h^2.$$

Để ý rằng: $a^2 = (c' + b')^2 \geq 4c'b' = 4h^2$ nên $\Delta = a^2 - 4h^2 \geq 0$. Do đó phương trình (*) luôn có hai nghiệm:

$$x_1 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4h^2}}{2} = \left(\frac{\sqrt{a+2h} + \sqrt{a-2h}}{2} \right)^2; x_2 = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4h^2}}{2} = \left(\frac{\sqrt{a+2h} - \sqrt{a-2h}}{2} \right)^2$$

$$\text{Do } c' \leq b' \text{ nên ta chọn: } c' = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4h^2}}{2} \text{ và } b' = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4h^2}}{2} \text{ hay còn được biểu diễn dưới dạng: } \sqrt{c'} = \frac{\sqrt{a+2h} - \sqrt{a-2h}}{2} \text{ và } \sqrt{b'} = \frac{\sqrt{a+2h} + \sqrt{a-2h}}{2}.$$

2. Các tính chất liên quan đến đường phân giác trong và đường phân giác ngoài của tam giác

Cho tam giác ABC có các đường phân giác trong AD, đường phân giác ngoài AE (D, E ∈ BC) và I là trung điểm của BC. Khi đó:

$$1) \frac{DB}{DC} = \frac{EB}{EC} = \frac{AB}{AC};$$

$$2) \frac{2}{ED} = \frac{1}{EB} + \frac{1}{EC} \text{ (Hệ thức Descartes);}$$

3) $MB^2 = MC^2 = MD \cdot ME$ (Hệ thức Newton);

4) $EB \cdot EC = ED \cdot EM$ (Hệ thức Maclaurin).

Chứng minh:

1) Với AD, AE là các đường phân giác trong và ngoài ta đã có $\frac{DB}{DC} = \frac{EB}{EC} = \frac{AB}{AC}$.

Nếu đặt $BC = a, CA = b, AB = c$ và $AD = l_a$ thì: $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$

$$\Rightarrow \frac{DB}{DB + DC} = \frac{AB}{AB + AC}$$

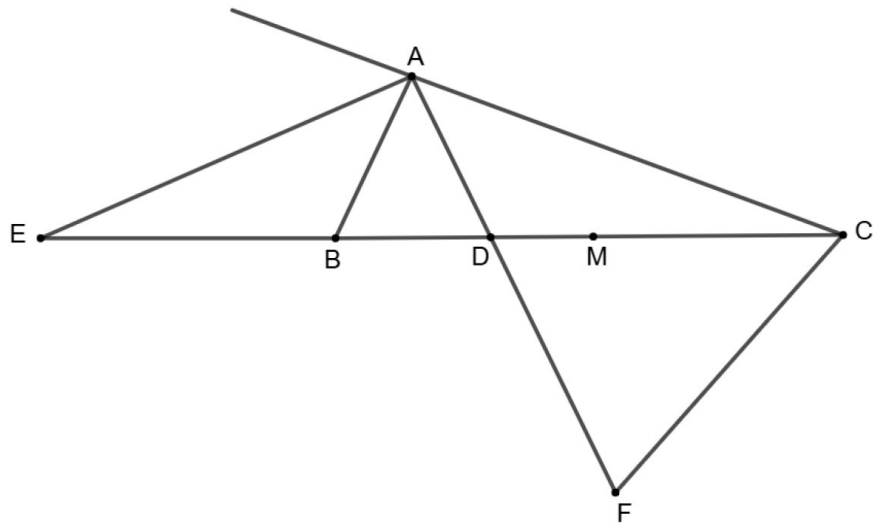
$$\Rightarrow \frac{DB}{BC} = \frac{AB}{AB + AC}$$

$$\Rightarrow DB = \frac{AB \cdot BC}{AB + AC}$$

$$= \frac{ab}{b + c}$$

$$\Rightarrow DC = BC - DB$$

$$= a - \frac{ab}{b + c} = \frac{ac}{b + c}.$$



Đây chính là công thức tính DB và DC theo độ dài các cạnh của tam giác ABC .

Gọi F là điểm nằm trên AD sao mà $\widehat{ABC} = \widehat{AFD}$. Khi đó:

$$\triangle ABD \sim \triangle AFC \text{ (g-g)} \Rightarrow \frac{AB}{AF} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow AB \cdot AC = AF \cdot AD.$$

$$\text{và } \triangle ABD \sim \triangle CFD \text{ (g-g)} \Rightarrow \frac{AD}{CD} = \frac{BD}{FD} \Rightarrow CD \cdot BD = AD \cdot FD.$$

Suy ra:

$$AB \cdot AC - CD \cdot BD = AF \cdot AD - AD \cdot FD = AD(AF - FD) = AD^2$$

$$\Rightarrow AD^2 = AB \cdot AC - CD \cdot BD = bc - \frac{ac}{b + c} \cdot \frac{ab}{b + c}$$

$$= bc \left[1 - \frac{a^2}{(b + c)^2} \right] = \frac{bc(b + c - a)(a + b + c)}{(b + c)^2}$$

$$\Rightarrow AD = \frac{\sqrt{bc(b + c - a)(a + b + c)}}{b + c} \text{ hay } l_a = \frac{\sqrt{bc(b + c - a)(a + b + c)}}{b + c}.$$

Đây chính là công thức tính độ dài đường phân giác trong theo độ dài các cạnh của tam giác ABC .

$$2) \text{ Từ } \frac{DB}{DC} = \frac{EB}{EC} \Rightarrow \frac{DB}{DC} = \frac{EB}{EC} \Rightarrow \frac{DB + DC}{DC} = \frac{EB + EC}{EC} \Rightarrow \frac{DB + DC}{EC - ED} = \frac{EB + EC}{EC}$$

$$\Rightarrow \frac{BC}{EC - ED} = \frac{EB + EC}{EC} \Rightarrow \frac{EC - EB}{EC - ED} = \frac{EB + EC}{EC}.$$

Sử dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\Rightarrow \frac{EC - EB}{EC - ED} = \frac{EB + EC}{EC} = \frac{EB + EC - EC + EB}{EC - EC + ED} = \frac{2EB}{ED}$$

$$\Rightarrow \frac{EB + EC}{EC} = \frac{2EB}{ED} \Rightarrow \frac{EB + EC}{EB \cdot EC} = \frac{2}{ED} \Rightarrow \frac{2}{ED} = \frac{1}{EB} + \frac{1}{EC}.$$

$$3) \text{ Từ } \frac{DB}{DC} = \frac{EB}{EC} \Rightarrow \frac{MB - MD}{MC + MD} = \frac{ME - MB}{ME + MC} \Rightarrow \frac{MB - MD}{MB + MD} = \frac{ME - MB}{ME + MB}$$

$$\Rightarrow (MB - MD)(ME + MB) = (ME - MB)(MB + MD)$$

$$\Rightarrow MB \cdot ME + MB^2 - MD \cdot ME - MD \cdot MB = ME \cdot MB + ME \cdot MD - MB^2 - MD \cdot MB$$

$$\Rightarrow 2MB^2 = 2MD \cdot ME \Rightarrow MB^2 = MD \cdot ME.$$

$$4) \text{ Ta có } EB \cdot EC = (EM - MB)(EM + MC) = (EM - MC)(EM + MC)$$

$$= EM^2 - MC^2 = EM^2 - MD \cdot ME = EM(EM - MD) = EM \cdot ED.$$

Lên bậc THPT đối với các bạn chuyên toán được học về hàng điểm điều hòa, khi đó các em sẽ có cách tiếp cận khoa học và đầy đủ hơn.

3. Định lý Ceva

Cho tam giác ABC và các điểm A', B', C' lần lượt thuộc các cạnh BC, CA, AB.

Khi đó AA', BB', CC' đồng quy khi và chỉ khi

$$\frac{AB'}{B'C} \cdot \frac{CA'}{A'B} \cdot \frac{BC'}{C'A} = 1.$$

Chứng minh:

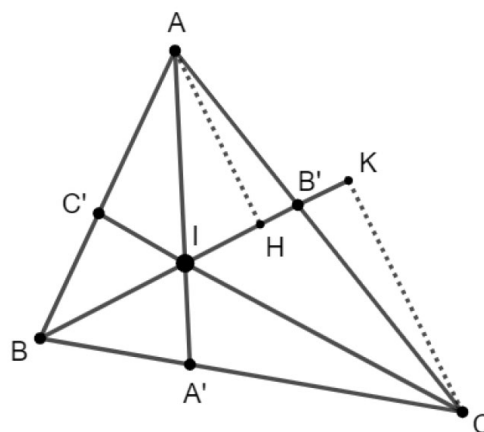
Chiều thuận AA', BB', CC' đồng quy tại I. Khi đó ký hiệu $S_{\triangle IBC} = S_1$, $S_{\triangle ICA} = S_2$ và $S_{\triangle IAB} = S_3$. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của A và C lên BB' ta có:

$$\frac{AB'}{B'C} = \frac{AH}{CK} = \frac{S_3}{S_1}.$$

$$\text{Tương tự cũng có: } \frac{CA'}{A'B} = \frac{S_2}{S_3} \text{ và } \frac{BC'}{C'A} = \frac{S_1}{S_2}$$

$$\text{Suy ra } \frac{AB'}{B'C} \cdot \frac{CA'}{A'B} \cdot \frac{BC'}{C'A} = \frac{S_3}{S_1} \cdot \frac{S_2}{S_3} \cdot \frac{S_1}{S_2} = 1. \text{ Ngoài ra học sinh cũng có thể dùng hệ}$$

quả của định lý Thalès để chứng minh kết quả này.



5.1. MỘT SỐ BÀI TOÁN CƠ BẢN CÓ NHIỀU Ý HỎI

Đây chủ yếu là những ý cơ bản được đưa vào để các em có bức tranh toàn cảnh về sự liên kết giữa các đối tượng. Học sinh có thể dùng để xử lý các bài tập khó hơn về sau. Vì vậy các em cố gắng nhớ lấy các kết quả đặc biệt này. Trong đó, một số ý (dành cho học sinh giỏi) có sử dụng các kiến thức bên ngoài sách giáo khoa thông thường. Tuy nhiên các kiến thức này đã được tác giả đề cập và chứng minh tương đối chi tiết ở trên.

Bài toán 5.1.1. (Bài toán liên quan đến trục tâm tam giác)

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn $(O; R)$ có AM, BN, CP là ba đường cao cắt nhau tại H.

1. Gọi I là trung điểm của BC. Chứng minh rằng:

a) Các tứ giác BPNC, ANHP là tứ giác nội tiếp;

b) Bốn điểm P, N, I, M cùng thuộc một đường tròn;

2. Giả thiết rằng $AB > AC$, đường thẳng vuông góc với HI tại H cắt AB, AC tương ứng tại R và T. Chứng minh H là trung điểm của RT;

3. Chứng minh $AP \cdot AB = AN \cdot AC = AH \cdot AM$ và $BP \cdot BA + CN \cdot CA = BC^2$;

4. Chứng minh rằng H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MNP;

5. Đường thẳng AM, BN, CP cắt đường tròn (O) tại D (khác A), E (khác B) và F (khác C):

a) Chứng minh rằng H và D đối xứng với nhau qua BC. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác BHC;

b) Chứng minh $EF \parallel NP$;

6. Vẽ đường kính AK, chứng minh rằng:

a) $\widehat{OAC} = \widehat{BAM}$ và OA vuông góc với NP;

b) BHCK là hình bình hành;

c) $OI \parallel AM$ và $OI = \frac{1}{2}AH$;

d) Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Chứng minh ba điểm O, G, H thẳng hàng và $OG = \frac{1}{2}GH$;

7. NP cắt BC tại Q, QA cắt (O) tại L. Chứng minh tứ giác ALPN nội tiếp và I, H, L thẳng hàng;

8. Chứng minh QH vuông góc với AI;

9. Chứng minh rằng $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}R \cdot (MP + PN + MN)$;

10. Cho BC cố định, hãy xác định vị trí của A để:

a) Chu vi tam giác ABC là lớn nhất;

b) Chu vi tam giác MNP là nhỏ nhất;

c) Diện tích tam giác AHN đạt giá trị lớn nhất;

d) Tìm giá trị lớn nhất của tích $MH \cdot MA$;

e) Chứng minh rằng độ dài PN không phụ thuộc vào vị trí của A.

Phân tích hướng giải và bình luận:

1. Để chứng minh tứ giác nội tiếp thì tốt nhất là các em sử dụng định nghĩa. Trong trường hợp sử dụng các dấu hiệu khác học sinh nên chứng minh lại.

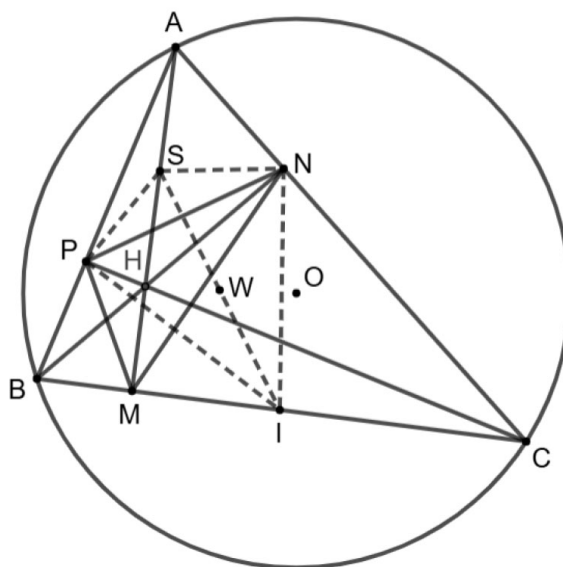
a) Theo bài ra $CP \perp AB$ và $BN \perp AC$ nên các tam giác BPC và CNB là các tam giác vuông.

PI là các đường trung tuyến ứng với cạnh huyền BC nên $IB = IC = IP$.

NI là các đường trung tuyến ứng với cạnh huyền BC nên $IB = IC = IN$.

Suy ra: $IB = IC = IP = IN$, do đó BPNC là tứ giác nội tiếp đường tròn tâm I bán kính $\frac{1}{2}BC$.

Gọi S là trung điểm của AH, khi đó NS là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền AH của tam giác vuông NAH



nên $SA = SH = SN = \frac{1}{2}AH$. PS là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền AH của tam giác vuông PAH nên $SA = SH = SP = \frac{1}{2}AH$.

Suy ra: $SA = SH = SN = SP = \frac{1}{2}AH \Rightarrow ANHP$ là tứ giác nội tiếp đường tròn có tâm S là trung điểm của AH và bán kính $\frac{1}{2}AH$.

b) Vì $SN = SH$ nên tam giác SNH cân tại S $\Rightarrow \widehat{SNH} = \widehat{SHN}$, $IB = IN \Rightarrow \triangle INB$ cân tại I $\Rightarrow \widehat{INB} = \widehat{IBN}$.

Suy ra: $\widehat{SNH} + \widehat{INB} = \widehat{SHN} + \widehat{IBN} = \widehat{MHB} + \widehat{HBM} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{SNI} = 90^\circ$.

Tương tự cũng có: $\widehat{SPI} = 90^\circ$. Khi đó các tam giác SNI, SPI, SMI đều là các tam giác vuông chung cạnh huyền SI. Gọi W là trung điểm của SI, khi đó:

$WN = WP = WM = WI = \frac{1}{2}SI \Rightarrow$ bốn điểm P, N, I, M cùng thuộc một đường tròn tâm W, bán kính $\frac{1}{2}SI$.

Dựa trên kết quả này có thể chỉ ra được: Đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP (đường tròn Euler) có tâm là trung điểm của HO và bán kính là $\frac{1}{2}R$.

Lưu ý: Từ $\widehat{SPI} = \widehat{SNI} = 90^\circ$ cho ta thấy SP và SN là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tứ giác BPNC hay nói khác đi là ta còn thu được kết quả: Hai tiếp tuyến của đường tròn (BPNC) tại P, N và AH đồng quy.

2. Giả thiết rằng $AB > AC$ mang tính chất sự phạm (để cho hình vẽ được gọn và thống nhất).

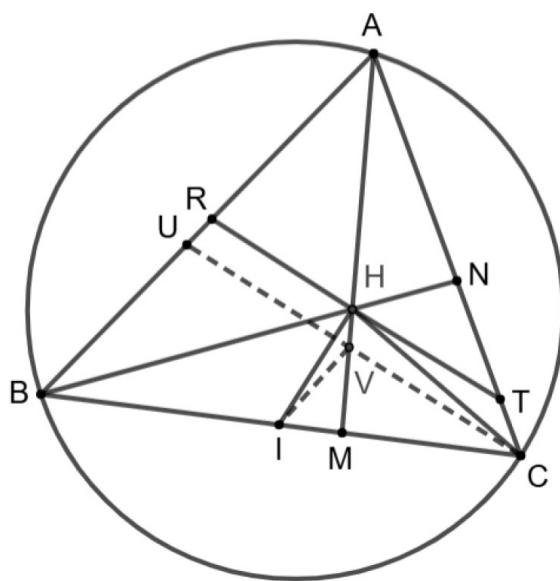
Từ C kẻ đường thẳng song song với RT cắt AB, AH lần lượt tại U và V. Khi đó:

$CV \perp IH$ (do $CV \parallel RT$), $HV \perp BC$ (do AM là đường cao của tam giác ABC)

$\Rightarrow V$ là trực tâm của tam giác HIC.

Suy ra: $IV \perp CH$, mà $CH \perp AB \Rightarrow IV \parallel AB$

hay $IV \parallel UB$. Vì I là trung điểm của BC nên IV là đường trung bình của tam giác CBU $\Rightarrow V$ là trung điểm của UC.



Sử dụng bổ đề hình thang suy ra H cũng là trung điểm của RT.

Ngoài cách trên các em có thể dùng cộng góc để chứng minh $\triangle ARH \sim \triangle CHI$ và $\triangle ATH \sim \triangle BHI$, từ đó lập tỉ số đồng dạng và suy ra được $HR = HT$.

3. Theo câu trên ta đã có BPNC là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{PBC} + \widehat{PNC} = 180^\circ$ mà $\widehat{ANP} + \widehat{PNC} = 180^\circ$ suy ra $\widehat{PBC} = \widehat{ANP}$ hay $\widehat{ABC} = \widehat{ANP}$.

Xét hai tam giác ABC và ANP có: $\begin{cases} \widehat{ABC} = \widehat{ANP} \\ \widehat{A} \text{ chung} \end{cases} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle ANP \text{ (g-g)}$

$$\Rightarrow \frac{AP}{AC} = \frac{AN}{AB} \Rightarrow AP \cdot AB = AN \cdot AC. \quad (1)$$

Do $AM \perp BC$ và $CP \perp AB$ nên APH và AMB là các tam giác vuông. Hai tam giác này có $\widehat{PAH}$ chung nên $\triangle APH \sim \triangle AMB \Rightarrow \frac{AP}{AM} = \frac{AH}{AB}$

$$\Rightarrow AP \cdot AB = AH \cdot AM. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta được: $AP \cdot AB = AN \cdot AC = AH \cdot AM$.

Bằng cách chứng minh tương tự như trên ta thu được các kết quả:

$$BP \cdot BA = BM \cdot BC \text{ và } CN \cdot CA = CM \cdot CB$$

$$\Rightarrow BP \cdot BA + CN \cdot CA = BM \cdot BC + CM \cdot CB = BC(BM + MC) = BC^2.$$

4. Ta sẽ chỉ ra MH là phân giác của góc PMN.

Thật vậy, chứng minh tương tự như trên ta sẽ chỉ ra được: BPHM là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{HMP} = \widehat{PBH}$ và CNHM là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{HMN} = \widehat{NCH}$. (3)

Mặt khác, tứ giác BPNC nội tiếp $\Rightarrow \widehat{PBN} = \widehat{NCP}$ hay $\widehat{PBH} = \widehat{NCH}$. (4)

Kết hợp (3) và (4) ta được: $\widehat{HMP} = \widehat{HMN}$ hay MH là phân giác của góc PMN.

Tương tự cũng có HP là phân giác của góc MPN.

Do đó H chính là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MNP.

5. Để thuận lợi cho việc quan sát, chúng ta vẽ lại hình như dưới đây.

a) Chứng minh tương tự như ở ý đầu tiên ta sẽ chỉ ra được ANMB là tứ giác nội tiếp. Suy ra $\widehat{NAM} = \widehat{MBA}$ hay $\widehat{CAD} = \widehat{EBC}$.

Mà $\widehat{CAD} = \widehat{CBD}$ (cùng chắn cung CD)

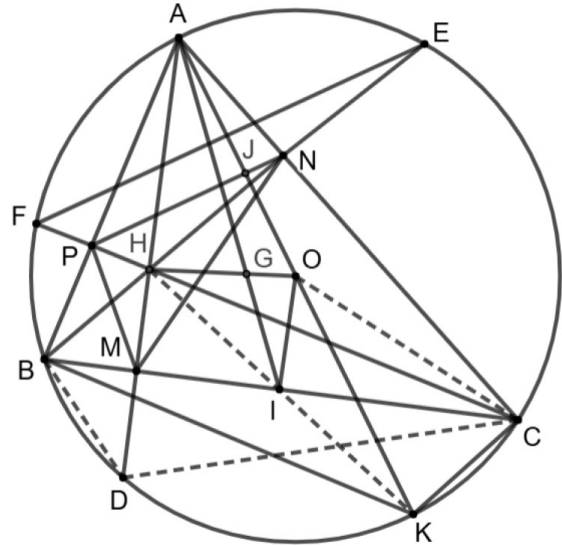
$\Rightarrow \widehat{EBC} = \widehat{CBD}$ hay BM là phân giác của góc HBD. Xét tam giác BHD có BM vừa là đường cao cũng là đường phân giác $\Rightarrow \triangle BHD$ cân, khi đó BM cũng là đường trung tuyến. Do vậy H và D đối xứng với nhau qua BC.

Lúc này BC chính là trung trực của HD. Xét hai tam giác BHC và BDC có:

$$\begin{cases} BH = BD \\ CH = CD \\ BC \text{ chung} \end{cases} \Rightarrow \triangle BHC = \triangle BDC.$$

Do tam giác BDC nội tiếp đường tròn $(O; R)$ nên bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác BHC cũng bằng R.

b) Sử dụng kết quả phần a, ta sẽ được P là trung điểm của HF, N là trung điểm của HE. Do đó NP là đường trung bình trong tam giác HEF, suy ra $EF \parallel NP$.



6. Gọi J là giao điểm của OA và NP.

a) Do tam giác OAC cân tại O nên sử dụng định lý về tổng ba góc trong tam giác ta có: $2\widehat{OAC} + \widehat{AOC} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{OAC} = 90^\circ - \frac{1}{2}\widehat{AOC}$.

Mà $\widehat{ABM} = \widehat{ABC} = \frac{1}{2}\widehat{AOC}$ suy ra: $\widehat{OAC} = 90^\circ - \widehat{ABM} = \widehat{BAM}$.

Theo trên ta đã có $\widehat{PBC} = \widehat{ANP}$ hay $\widehat{ABM} = \widehat{ANJ}$. Xét tam giác ANJ có $\widehat{ANJ} + \widehat{JAN} = \widehat{ABM} + \widehat{BAM} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{AJN} = 90^\circ$ hay OA vuông góc với NP.

Lưu ý: Ta có thể chứng minh $\widehat{OAC} = \widehat{BAM}$ theo cách khác như sau: vì $\widehat{ABC} = \widehat{AKC}$ (cùng chắn cung AC) $\Rightarrow \widehat{OAC} = \widehat{BAM}$ (cùng phụ với góc ABC). Ngoài ra AK, AD là hai đường đẳng giác trong góc BAC (đối xứng nhau qua phân giác góc BAC). Các em có thể tham khảo thêm các tài liệu về đường đẳng giác, đường đối trung với rất nhiều tính chất hay và được sử dụng trong một số đề thi học sinh giỏi, đề thi vào lớp 10 chuyên Toán, Tin các tỉnh thành (chẳng hạn như đề thi vào lớp 10 chuyên Tin của Hà Nội năm 2025).

Phần VI. TOÁN THỰC TẾ

Gần đây toán thực tế xuất hiện tương đối nhiều trong các đề thi học sinh giỏi, đề thi khảo sát chất lượng học sinh, đề thi vào lớp 10 THPT. Học sinh muốn làm tốt thể loại này thì trước tiên phải nắm vững kiến thức cơ bản trong sách giáo khoa. Tiếp đó là phải phân loại được bài toán đó thuộc dạng nào và khi đã xác định được dạng thì có một nguyên tắc giải là chuyển từ bài toán thực tế sang mô hình toán học. Đây là thao tác quan trọng và cũng tương đối khó, đòi hỏi các em phải có những trải nghiệm, hiểu được ngôn ngữ cuộc sống thường nhật, đọc nhiều, làm nhiều đề để tích lũy kinh nghiệm.

Các bài toán đưa ra khá phong phú và đa dạng, tuy nhiên có thể chia thành bốn loại cơ bản sau đây:

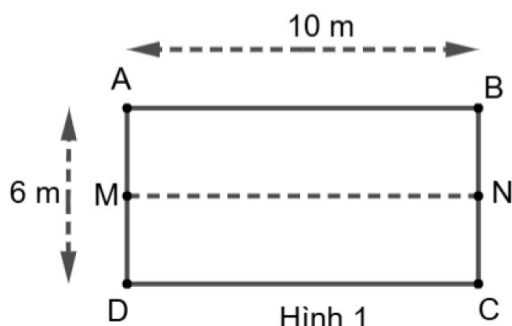
- ⊙ *Cực trị hình học.*
- ⊙ *Bài toán tối ưu.*
- ⊙ *Bài toán suy luận.*
- ⊙ *Các bài toán có chứa yếu tố thực tế khác.*

Bây giờ chúng ta sẽ cùng đi vào tìm hiểu, phân tích từng dạng toán thực tế qua những ví dụ tiêu biểu dưới đây.

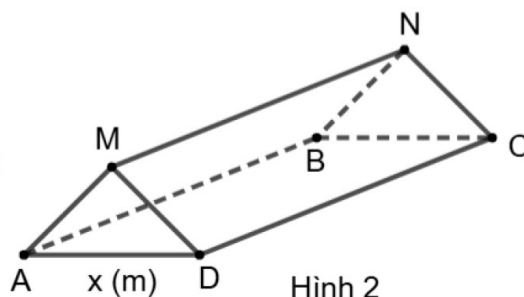
6.1. CÁC BÀI TOÁN CỰC TRỊ HÌNH HỌC

Để làm được dạng này, học sinh cần đọc và phân tích kỹ đề bài. Sử dụng các kiến thức đã học như: bất đẳng thức tam giác, chu vi, diện tích... để đưa ra được điều kiện ràng buộc giữa các đại lượng đầu vào. Quan trọng hơn nữa là cần nắm vững công thức tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, thể tích của các hình cơ bản: hình hộp chữ nhật, hình lập phương, hình lăng trụ ... để đưa yêu cầu về mô hình toán học. Từ đây kết hợp với một số phương pháp như: chứng minh trực tiếp, dùng các bất đẳng thức cổ điển... để đi tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của những biểu thức đó.

Bài toán 6.1.1. Trong buổi thăm quan dã ngoại, mỗi lớp khối 9 được chuẩn bị một tấm bạt hình chữ nhật ABCD cùng loại, có chiều dài 10 m và chiều rộng 6 m; với M, N là trung điểm các cạnh AD, BC (hình 1).



Hình 1



Hình 2

Mỗi lớp sử dụng tấm bạt như trên để dựng thành chiếc lều có dạng hình lăng trụ đứng tam giác (hình 2); hai đáy hình lăng trụ là hai tam giác cân: tam giác ADM và tam giác BNC, với độ dài cạnh đáy của hai tam giác cân là x (m). (Tấm bạt chỉ dùng để dựng thành mái lều, không trải thành đáy lều). Tìm x để thể tích không gian trong lều là lớn nhất.

Phân tích hướng giải và bình luận:

Đây bài toán trích trong đề minh họa của Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội cho kỳ thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT, theo Chương trình GDPT 2018, kèm thông báo số 2998/TB-SGDĐT ngày 28/08/2024.

Theo bất đẳng thức tam giác thì $0 < AD < AM + MD$ hay $0 < x < 6$.

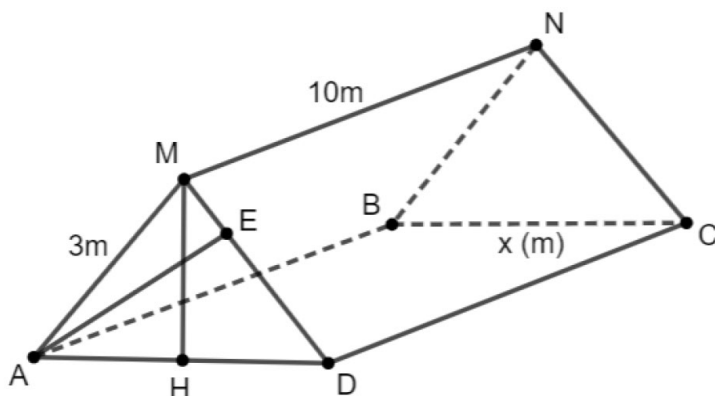
Vì M là trung điểm của AD (hình 1) nên $MA = MD = \frac{6}{2} = 3$ (m).

Gọi H là hình chiếu vuông góc của M lên AD như hình bên.

Do tam giác MAD cân tại M nên MH cũng là đường trung tuyến, nghĩa là H là trung điểm của AD và $AH = \frac{x}{2}$ (m).

Sử dụng định lý Pythagoras với tam giác vuông HMA ta có:

$$HM^2 + HA^2 = MA^2$$



$$HM^2 = MA^2 - HA^2 = 9 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 9 - \frac{x^2}{4}.$$

$$\text{Suy ra: } HM = \sqrt{9 - \frac{x^2}{4}} \text{ (m)}.$$

Diện tích đáy MAD của hình lăng trụ là:

$$S_{MAD} = \frac{1}{2} AD \cdot MH = \frac{1}{2} x \cdot \sqrt{9 - \frac{x^2}{4}} \text{ (m}^2\text{)}.$$

Khi đó thể tích của hình lăng trụ xác định bởi:

$$\begin{aligned} V_{MAB.NBC} &= S_{MAD} \cdot MN \\ &= \frac{1}{2} \cdot 10x \sqrt{9 - \frac{x^2}{4}} = 5x \sqrt{9 - \frac{x^2}{4}} \\ &= 5x \sqrt{9 - \frac{x^2}{4}} = 5 \sqrt{9x^2 - \frac{x^4}{4}} \text{ (m}^3\text{)}. \end{aligned}$$

Ta biến đổi:

$$V_{MAB.NBC} = 5 \sqrt{81 - \left[\left(\frac{x^2}{2}\right)^2 - 2 \cdot 9 \frac{x^2}{2} + 81\right]} = 5 \sqrt{81 - \left(\frac{x^2}{2} - 9\right)^2}.$$

Vì $\left(\frac{x^2}{2} - 9\right)^2 \geq 0$ nên $81 - \left(\frac{x^2}{2} - 9\right)^2 \leq 81$. Suy ra:

$$V_{MAB.NBC} \leq 5\sqrt{81} \text{ hay } V_{MAB.NBC} \leq 45.$$

Dấu “=” xảy ra khi: $\frac{x^2}{2} - 9 = 0 \Rightarrow x = 3\sqrt{2}$ (thỏa mãn); $x = -3\sqrt{2}$ (loại).

Vậy kết luận: khi $x = 3\sqrt{2}$ (m) thì thể tích không gian trong lều lớn nhất và giá trị lớn nhất tương ứng là 45 m^3 .

Ngoài ra các em cũng có thể sử dụng bất đẳng thức cơ bản $ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$ để giải quyết bài toán trên như sau:

$$\begin{aligned} V_{MAB.NBC} &= S_{MAD} \cdot MN \\ &= \frac{1}{2} \cdot 10x \sqrt{9 - \frac{x^2}{4}} = 10 \frac{x}{2} \sqrt{9 - \frac{x^2}{4}} \\ &\leq 10 \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{9 - \frac{x^2}{4}}\right)^2}{2} = 10 \cdot \frac{\frac{x^2}{4} + 9 - \frac{x^2}{4}}{2} = 45. \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi $\frac{x}{2} = \sqrt{9 - \frac{x^2}{4}}$, giải phương trình này với điều kiện $x > 0$ ta cũng thu được $x = 3\sqrt{2}$ như trên.

Có thể thấy rằng việc tạo ra chiếc lều với cạnh đáy $x = 3\sqrt{2}$ không đơn giản với nhiều học sinh. Nhưng nếu để ý rằng $3^2 + 3^2 = (3\sqrt{2})^2$ hay $MA^2 + MD^2 = AD^2$ khi đó tam giác MAD vuông tại M (định lý Pythagoras đảo). Do đó các em chỉ cần dựng lều sao cho hai đáy là các tam giác vuông cân. Từ đây nảy ra suy nghĩ rằng chúng ta còn có thể giải theo cách đơn giản hơn nữa như sau:

$$V_{MAB.NBC} = S_{MAD} \cdot MN = 10 \cdot S_{MAD}.$$

Để $V_{MAB.NBC}$ đạt giá trị lớn nhất thì S_{MAD} phải lớn nhất.

Gọi E là hình chiếu vuông góc của A lên MD , khi đó:

$$S_{MAD} = \frac{1}{2} AE \cdot MD = \frac{3}{2} AE \leq \frac{3}{2} AM = \frac{9}{2}.$$

$$\text{Suy ra } V_{MAB.NBC} = 10 \cdot S_{MAD} \leq 10 \cdot \frac{9}{2} = 45.$$

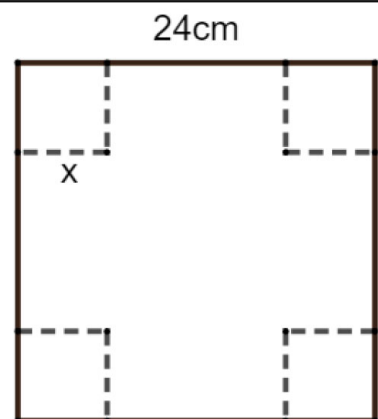
Dấu “=” xảy ra khi $AM \perp MD$, sử dụng định lý Pythagoras ta được:

$$AD^2 = MA^2 + MD^2 = 18 \Rightarrow AD = 3\sqrt{2} \text{ hay } x = 3\sqrt{2}.$$

Tuy nhiên vẫn khuyên các bạn ưu tiên cách đọc hiểu và chuyển từ bài toán thực tế sang mô hình toán học như hai cách đầu tiên.

Bài toán 6.1.2. Một tấm bìa hình vuông có cạnh 24 cm. Ở mỗi góc người ta cắt đi một hình vuông nhỏ (như hình vẽ) rồi gấp lên để tạo thành chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật không nắp.

Tìm độ dài cạnh hình vuông nhỏ phải cắt để chiếc hộp thu được có thể tích lớn nhất.



Phân tích hướng giải và bình luận:

Điều kiện: $2x < 24$ hay $x < 12$.

Khi đó độ dài cạnh hình vuông đáy hộp là $24 - 2x$ (cm) và thể tích chiếc hộp được xác định bởi công thức:

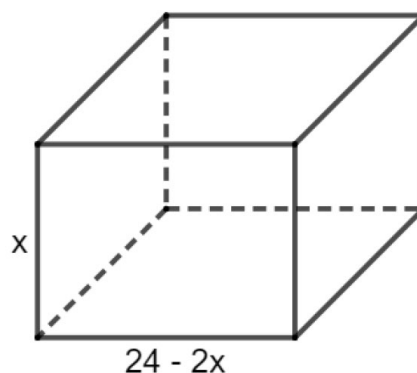
$$V = x(24 - 2x)^2 = 4x(12 - x)^2 \\ = 2[2x(12 - x)(12 - x)] \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy với ba số ta có:

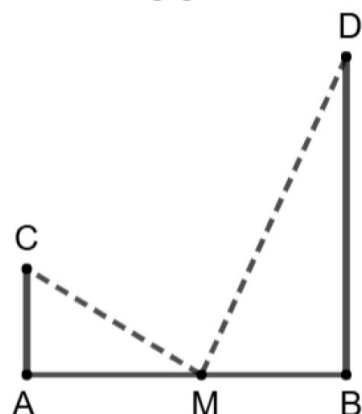
$$V = 2[2x(12 - x)(12 - x)] \\ \leq 2\left(\frac{2x + 12 - x + 12 - x}{3}\right)^3 = 1024.$$

Dấu “=” xảy ra khi $2x = 12 - x$ hay $x = 4$ (thỏa mãn).

Vậy ta phải cắt mỗi góc một hình vuông nhỏ có cạnh là 4 cm để chiếc hộp thu được có thể tích lớn nhất.



Bài toán 6.1.3. Có hai chiếc cọc cao 10 m và 30 m đặt vuông góc với mặt đất tại hai vị trí A và B. Biết rằng khoảng cách giữa hai cọc là 24 m. Người ta đặt một cái chốt ở vị trí M trên mặt đất, nằm giữa hai chân cọc để giăng dây nối đến hai đỉnh C và D của hai cọc (như hình vẽ). Hỏi người ta phải đặt chốt cách vị trí A một khoảng bằng bao nhiêu để tổng độ dài của hai sợi dây đó là ngắn nhất.



Phân tích hướng giải và bình luận:

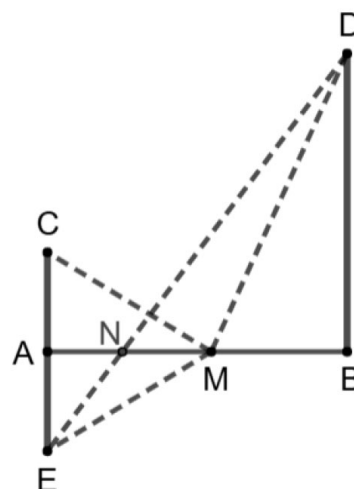
Bài toán này trích trong đề thi HSG môn Toán lớp 9, tỉnh Thanh Hóa, năm học 2024 – 2025.

Gọi E là điểm đối xứng của C qua A. Khi đó AB là trung trực của CE nên tam giác MCE cân tại M.

Theo bất đẳng thức tam giác thì:

$$MC + MD = ME + MD \geq ED.$$

Dấu “=” xảy ra khi E, M, D thẳng hàng nghĩa là $M \equiv N$, trong đó N là giao điểm của ED với AB.



Sử dụng hệ quả của định lý Thalès kết hợp với tính chất của tỉ lệ thức ta có:

$$\frac{AN}{NB} = \frac{AE}{BD} = \frac{AC}{BD} \Rightarrow \frac{AN}{AN + NB} = \frac{AC}{AC + BD}$$

$$\text{hay } \frac{AN}{AB} = \frac{AC}{AC + BD} \Rightarrow AN = \frac{AB \cdot AC}{AC + BD} = \frac{24 \cdot 10}{10 + 30} = 6.$$

Như vậy, để để tổng độ dài của hai sợi dây đó là ngắn nhất thì chốt M phải cách A là 6 m.

Ngoài ra các em cũng có thể giải bài toán trên theo một cách khác như sau:

Đặt $AM = x$ (m) (điều kiện $0 \leq x \leq 24$). Khi đó sử dụng định lý Pythagoras:

$$MC = \sqrt{AC^2 + AM^2} = \sqrt{x^2 + 10^2} \text{ và } MD = \sqrt{BM^2 + BD^2} = \sqrt{(24 - x)^2 + 30^2}$$

$$\text{nên: } MC + MD = \sqrt{x^2 + 10^2} + \sqrt{(24 - x)^2 + 30^2}.$$

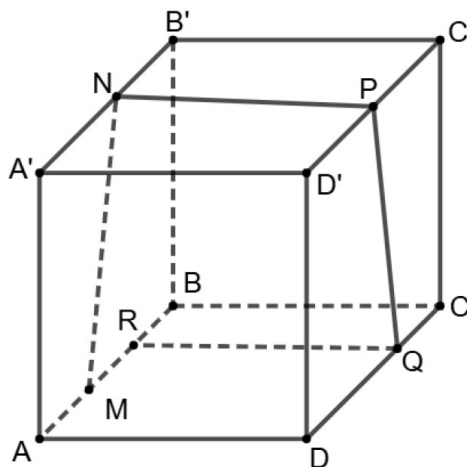
Sử dụng bất đẳng thức Minkowski ta có:

$$\sqrt{x^2 + 10^2} + \sqrt{(24 - x)^2 + 30^2} \geq \sqrt{(x + 24 - x)^2 + (10 + 30)^2} = 8\sqrt{34}.$$

Suy ra: $MC + MD \geq \sqrt{34}$. Dấu “=” xảy ra khi $\frac{x}{10} = \frac{24 - x}{30} \Rightarrow x = 6$ (thỏa mãn).

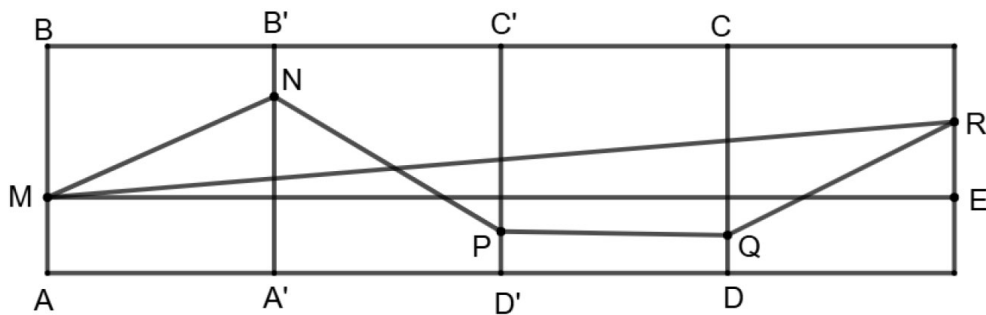
Bài toán 6.1.4. (Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT Chuyên ĐHSP Hà Nội, môn Toán chung, năm 2025)

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 30 cm. Trên cạnh AB lấy các điểm M và R sao cho $AM = MR = RB$. Bạn Lan lấy một sợi dây từ điểm M đi qua các cạnh $A'B'$, $C'D'$, CD lần lượt tại các điểm N, P, Q. Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng $MN + NP + PQ + QR$.



Phân tích hướng giải và bình luận:

Để giải bài tập dạng này chúng ta sử dụng kỹ thuật “trả hình” như hình vẽ dưới đây:



Khi đó: $MN + NP + PQ + QR \geq MR$.

Dấu “=” xảy ra khi M, N, P, Q, R thẳng hàng.

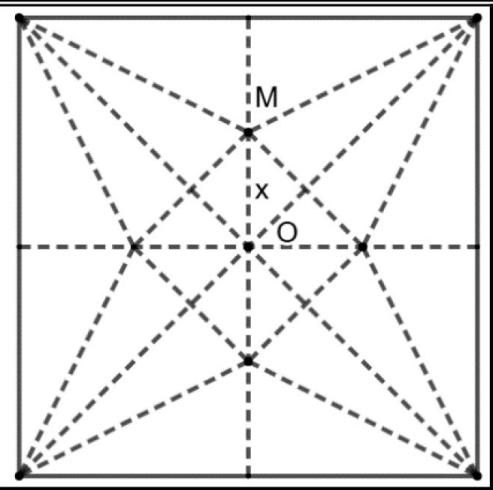
Sử dụng định lý Pythagoras ta có:

$$MR^2 = ME^2 + ER^2 = 120^2 + 10^2$$

$MR = 10\sqrt{145}$. Vậy GTNN của tổng $MN + NP + PQ + QR$ là $10\sqrt{145}$ cm.

Bài toán 6.1.5. Trong giờ thực hành về hình học trực quan, học sinh cắt miếng bìa hình vuông như hình bên và gấp thành hình một hình chóp tứ giác đều. Biết các cạnh hình vuông có độ dài 10 cm và $OM = x$ (cm).

Tìm x để thể tích hình chóp đều thu được là lớn nhất.



Phân tích hướng giải và bình luận:

Điều kiện: $0 < x \leq 5$.

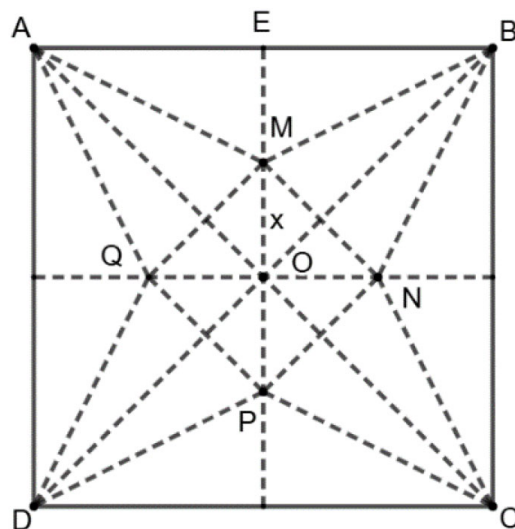
Ký hiệu các điểm trên hình vuông như hình vẽ bên, sử dụng định lý Pythagoras ta tính được:

$$MN^2 = OM^2 + ON^2 = x^2 + x^2 = 2x^2.$$

$$AM^2 = AE^2 + EM^2$$

$$= 5^2 + (5 - x)^2 = x^2 - 10x + 50.$$

Sau khi gấp lên tạo thành hình chóp thì chiều cao h được xác định bởi:



$$h = \sqrt{AM^2 - OM^2} = \sqrt{x^2 - 10x + 50 - x^2} = \sqrt{50 - 10x} \text{ (m)}.$$

Khi đó thể tích hình chóp là:

$$V = \frac{1}{3} S_{MNPQ} \cdot h = \frac{1}{3} MN^2 \cdot h = \frac{2}{3} x^2 \cdot \sqrt{50 - 10x} = \frac{2\sqrt{10}}{3} x^2 \cdot \sqrt{5 - x} \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Ta biến đổi: $V^2 = \frac{40}{9} x^4 (5 - x) = \frac{40}{9} f(x)$ với $f(x) = x^4 (5 - x)$.

Dự đoán giá trị lớn nhất của $f(x)$ đạt tại $x = 4$, ta xét hiệu:

$$f(x) - f(4) = f(x) - 256 = -(x - 4)^2 (x^3 + 3x^2 + 8x + 16) \leq 0 \quad \forall 0 < x \leq 5.$$

$$\Rightarrow f(x) \leq 256 \Rightarrow V^2 \leq \frac{40}{9} \cdot 256 \Rightarrow V \leq \frac{32\sqrt{10}}{3}.$$

Dấu “=” xảy ra khi $x = 4$ (thỏa mãn).

Vậy với $x = 4$ cm thì thể tích hình chóp đều lớn nhất và giá trị lớn nhất tương ứng là $\frac{32\sqrt{10}}{3} \text{ cm}^3$.

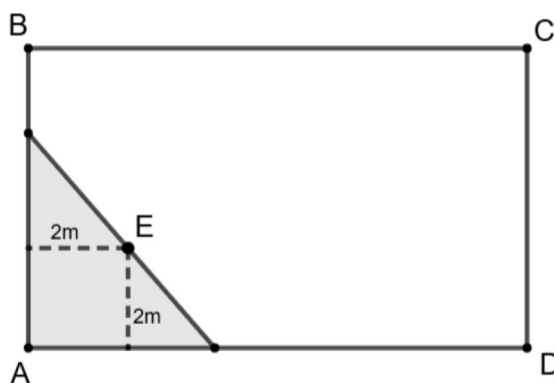
Ngoài ra các em cũng có thể sử dụng bất đẳng thức Cauchy để tìm giá trị lớn nhất của $f(x)$ như sau:

$$f(x) = x^4 (5 - x) = \frac{1}{4} x^4 (20 - 4x) \leq \frac{1}{4} \left(\frac{x + x + x + x + 20 - 4x}{5} \right)^5 = 256.$$

Dấu “=” xảy ra khi $x = 20 - 4x \Rightarrow x = 4$.

Ta cũng thu được kết quả tương tự.

Bài toán 6.1.6. Ở một góc của ao làng hình chữ nhật, người ta đóng một chiếc cọc tại vị trí E (như hình vẽ). Khoảng cách từ E tới bờ AB, AD đều bằng 2 m. Sau đó họ dùng cây sào, thân được buộc vào cọc sao cho nó có thể trượt hoặc quay xung quanh E, hai đầu M, N tiếp xúc với bờ để ngăn một góc nhỏ và thả bè tai tượng tạo cảnh quan cũng như cải tạo môi trường nước. Xác định chiều dài ngắn nhất của cây sào cần dùng (bỏ qua đường kính của cây sào và cọc).



Phân tích hướng giải và bình luận:

Như hình vẽ bên, ta đặt $AM = x$ (m);

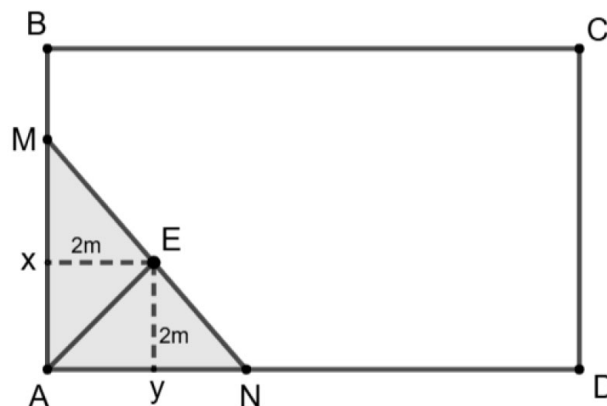
$AN = y$ (m). Khi đó:

$$S_{\Delta AMN} = S_{\Delta AEM} + S_{\Delta AEN}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}xy = \frac{1}{2}2x + \frac{1}{2}2y \Rightarrow xy = 2(x + y)$$

$$\text{Từ } (x - y)^2 \geq 0 \Rightarrow (x + y)^2 \geq 4xy$$

$$\Rightarrow xy \leq \frac{(x + y)^2}{4}.$$



Sử dụng kết quả này ta được: $2(x + y) = xy \leq \frac{(x + y)^2}{4} \Rightarrow x + y \geq 8$.

Theo định lý Pythagoras thì: $MN^2 = AM^2 + AN^2 = x^2 + y^2$.

Sử dụng bất đẳng thức cơ bản ta có: $x^2 + y^2 \geq \frac{1}{2}(x + y)^2 \geq \frac{1}{2} \cdot 8^2 = 32$.

Suy ra: $MN^2 \geq 32 \Rightarrow MN \geq 4\sqrt{2}$. Dấu “=” xảy ra khi $x = y = 4$.

Vậy chiều dài ngắn nhất của cây sào cần dùng là $4\sqrt{2}$ m.

Bài toán sẽ trở nên khó khăn hơn với giả thiết khoảng cách từ E tới AB, AD khác nhau. Chẳng hạn khoảng cách từ E tới bờ AB, AD lần lượt 1 m và 8 m.

Khi đó tương tự như trên ta có:

$$S_{\Delta AMN} = S_{\Delta AEM} + S_{\Delta AEN}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}xy = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}8y \Rightarrow xy = x + 8y \Rightarrow \frac{8}{x} + \frac{1}{y} = 1.$$

Theo định lý Pythagoras thì:

$$MN^2 = AM^2 + AN^2 = x^2 + y^2 = (x - 10)^2 + (y - 5)^2 + 20x + 10y - 125$$

$$= (x - 10)^2 + (y - 5)^2 + 10(2x + y) \left(\frac{8}{x} + \frac{1}{y} \right) - 125$$

$$= (x - 10)^2 + (y - 5)^2 + 20 \left(\frac{x}{y} + 4 \cdot \frac{y}{x} \right) + 45.$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy ta có: $\frac{x}{y} + 4 \cdot \frac{y}{x} \geq 2\sqrt{\frac{x}{y} \cdot 4 \cdot \frac{y}{x}} = 4$.

Kết hợp với $(x - 10)^2 + (y - 5)^2 \geq 0$ ta được: $MN^2 \geq 0 + 20 \cdot 4 + 45 = 125$

$\Rightarrow MN \geq 5\sqrt{5}$. Dấu “=” xảy ra khi $x = 10$; $y = 5$ (thỏa mãn).

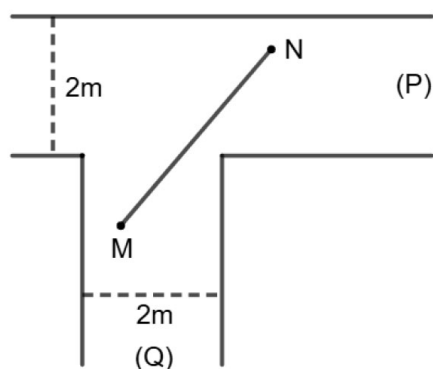
Vậy chiều dài ngắn nhất của cây sào cần dùng là $5\sqrt{5}$ m.

Nếu bài toán yêu cầu xác định giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác AMN, khi đó các em sử dụng bất đẳng thức Cauchy:

$$xy = x + 8y \geq 2\sqrt{x \cdot 8y} = 2\sqrt{8xy} \Rightarrow (xy)^2 \geq 32xy \Rightarrow xy \geq 32.$$

Suy ra: $S_{\Delta AMN} = \frac{1}{2}xy \geq 16$ hay $S_{\Delta AMN} \geq 16$. Dấu “=” xảy ra khi $x = 16$; $y = 2$.

Bài toán 6.1.7. Hai mương nước (P) và (Q) thông với nhau như hình vẽ bên. Biết rằng bờ của mương nước (P) vuông góc với bờ của mương nước (Q) và chiều rộng của 2 mương nước đều là 2 m. Một thanh gỗ MN (coi như thiết diện không đáng kể) trôi từ mương (Q) sang mương (P).



Tính độ dài lớn nhất của thanh gỗ sao cho nó có thể trôi mà không bị vướng.

Phân tích hướng giải và bình luận:

Ký hiệu các điểm đặc biệt trên hai bờ của các mương nước như hình vẽ.

Trước hết ta sẽ tìm hai điểm E, F sao cho E, C, F thẳng hàng và EF có độ dài ngắn nhất.

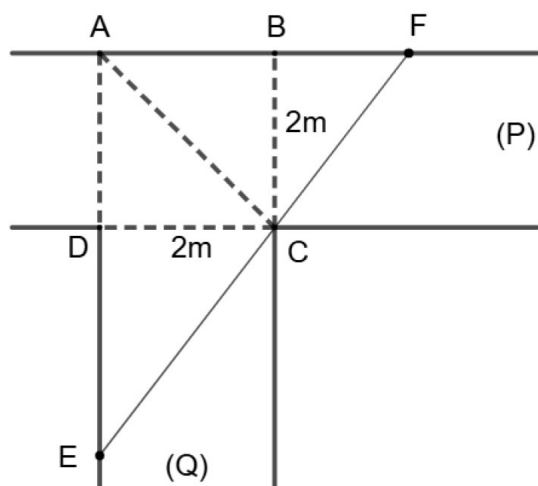
Tương tự như bài toán trên, đặt $AE = x$ (m), $AF = y$ (m).

$$\text{Khi đó: } S_{\Delta AEF} = S_{\Delta AEC} + S_{\Delta AFC}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}xy = \frac{1}{2}2x + \frac{1}{2}2y \Rightarrow xy = 2(x + y)$$

$$\text{Từ } (x - y)^2 \geq 0 \Rightarrow (x + y)^2 \geq 4xy$$

$$\Rightarrow xy \leq \frac{(x + y)^2}{4}.$$



Sử dụng kết quả này ta được: $2(x + y) = xy \leq \frac{(x + y)^2}{4} \Rightarrow x + y \geq 8$.

Theo định lý Pythagoras thì: $EF^2 = AE^2 + AF^2 = x^2 + y^2$.

Từ $(x - y)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + x^2 + y^2 \geq x^2 + y^2 + 2xy$

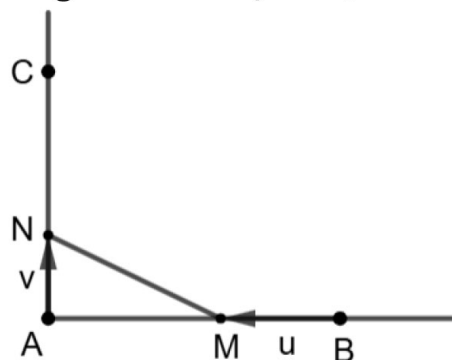
$\Rightarrow 2(x^2 + y^2) \geq (x + y)^2 \geq 64 \Rightarrow x^2 + y^2 \geq 32$

$\Rightarrow EF^2 = x^2 + y^2 \geq 32 \Rightarrow EF \geq 4\sqrt{2}$. Dấu "=" xảy ra khi $x = y = 4$.

Như thế để thanh gỗ MN có thể trôi từ mương nước (Q) sang mương nước (P) mà không bị vướng thì MN không vượt quá giá trị nhỏ nhất của EF nghĩa là $MN \leq 4\sqrt{2}$. Vậy độ dài lớn nhất của thanh gỗ là $4\sqrt{2}$ m.

Trong trường hợp chiều rộng của hai mương nước khác nhau thì tùy thuộc số liệu đầu vào mà học sinh có cách làm cụ thể như đã trình bày ở bài trước.

Bài toán 6.1.8. Tại cùng một thời điểm, có hai người ở hai vị trí A, B cách nhau 1000 m. Người thứ nhất ở vị trí B đi về phía A với vận tốc 2 m/s và người thứ hai đi từ A về phía C với vận tốc 1,5 m/s. Biết rằng AB và AC vuông góc với nhau (như hình vẽ). Hãy cho biết sau bao nhiêu giây thì khoảng cách giữa hai người này là nhỏ nhất.



Phân tích hướng giải và bình luận:

Đây bài toán trích trong đề minh họa của Sở Giáo dục và Đào tạo tỉnh Bà Rịa – Vũng Tàu cho kỳ thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT, năm học 2025 – 2026.

Gọi t (giây) là thời gian di chuyển của cả hai người ($t > 0$).

Khi đó ta tính được: $MB = 2t$ (m) $\Rightarrow AM = |1000 - 2t|$ (m) và $AN = 1,5t$ (m).

MN sẽ là khoảng cách giữa hai người trong quá trình di chuyển. Sử dụng định lý Pythagoras với tam giác vuông AMN ta có:

$$MN^2 = AM^2 + AN^2 = (1000 - 2t)^2 + (1,5t)^2$$

Phần VII. MỘT SỐ YẾU TỐ THỐNG KÊ VÀ XÁC SUẤT

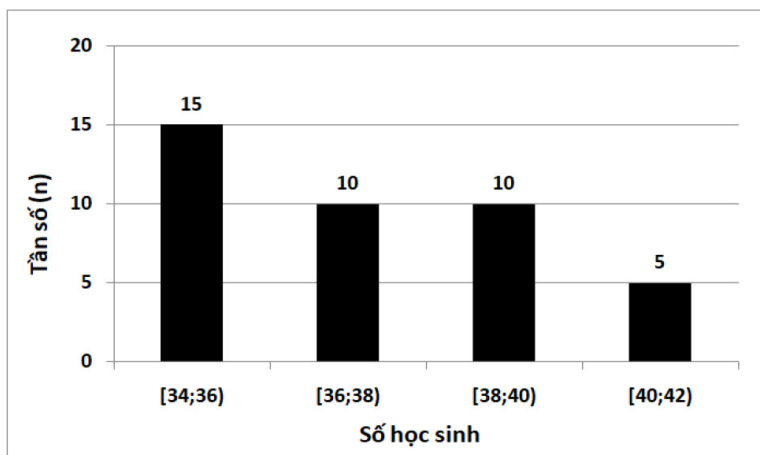
Trong các lĩnh vực của Toán học, thống kê và xác suất có ứng dụng thực tế to lớn đối với cuộc sống hàng ngày. Đặc biệt trong thời đại công nghệ thông tin hiện nay, với số lượng dữ liệu khổng lồ chưa từng có, kiến thức xác suất thống kê càng phát huy được tác dụng.

Trong khuôn khổ đề thi với mức độ nhận biết, thông hiểu, việc tính xác suất không khó, tuy nhiên đòi hỏi các em phải nắm thật vững lý thuyết trong sách giáo khoa và lý luận chặt chẽ.

7.1. MỘT SỐ YẾU TỐ THỐNG KÊ

Bài toán 7.1.1. (Đề minh họa của Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội cho kỳ thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT, theo Chương trình GDPT 2018, kèm thông báo số 2998/TB-SGDĐT ngày 28/08/2024)

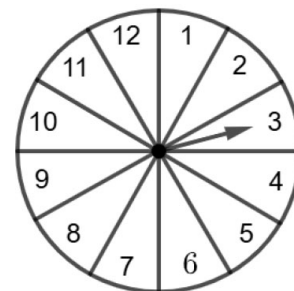
1. Sau khi điều tra số học sinh trong 40 lớp học (đơn vị: học sinh) người ta có biểu đồ tần số ghép nhóm dưới đây:



Tìm tần số ghép nhóm và tần số tương đối ghép nhóm của nhóm $[40; 42)$.

2. Hình vẽ bên mô tả một đĩa tròn bằng bìa cứng

được chia làm 12 phần bằng nhau và ghi các số 1, 2, 3, ..., 11, 12; chiếc kim được gắn cố định vào trục quay ở tâm của đĩa. Xét phép thử “Quay đĩa tròn một lần” và biến cố M: “Chiếc kim chỉ vào hình quạt ghi số chia hết cho 4”. Tính xác suất của biến cố M.



Phân tích hướng giải và bình luận:

Thực tế thì trong một số đề thi, thống kê và xác suất thường nằm trong cùng một câu. Vì thế tác giả xin phép đưa vào cả bài toán đó thay vì chia theo các chuyên mục tương ứng.

1. Từ biểu đồ tần số ghép nhóm ta lập bảng tần số ghép nhóm:

Nhóm	Tần số (n)
[34; 36)	15
[36; 38)	10
[38; 40)	10
[40; 42)	5
Cộng	N = 40

Từ đây ta tính được:

⊙ Tần số ghép nhóm của nhóm [40; 42) là: $n_4 = 5$.

⊙ Tần số tương đối ghép nhóm của nhóm [40; 42) là:

$$f_4 = \frac{5}{40} \cdot 100\% = 12,5\%.$$

Lưu ý: Học sinh cũng có thể tính trực tiếp mà không cần lập bảng tần số.

2. Xét phép thử “Quay đĩa tròn một lần”. Ta thấy các kết quả xảy ra của phép thử đó là đồng khả năng. Tập hợp các kết quả có thể xảy ra với phép thử là:

$\Omega = \{\text{hình quạt ghi số 1; hình quạt ghi số 2; hình quạt ghi số 3;}$

hình quạt ghi số 4; hình quạt ghi số 5; hình quạt ghi số 6; hình quạt ghi số 7;

hình quạt ghi số 8; hình quạt ghi số 9; hình quạt ghi số 10; hình quạt ghi số 11;

hình quạt ghi số 12}.

Số phần tử của tập Ω là 12.

Các kết quả thuận lợi cho biến cố M là: hình quạt ghi số 4; hình quạt ghi số 8; hình quạt ghi số 12.

Ta thấy có 3 kết quả thuận lợi cho biến cố này.

Khi đó xác suất của biến cố M là: $P(M) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$.

Vậy xác suất của biến cố M là $\frac{1}{4}$.

Bài toán 7.1.2. (Đề thi tuyển sinh vào lớp 10, TP. Hà Nội, năm 2025)

1) Kết quả khảo sát 300 học sinh lớp 9 về thời gian tự học của mỗi bạn trong một tuần (đơn vị: giờ) được cho trong bảng tần số ghép nhóm sau đây:

Thời gian tự học (giờ)	[0; 4)	[4; 8)	[8; 12)	[12; 16)	[16; 20)
Số học sinh	17	72	94	75	42

Xác định tần số và tần số tương đối của nhóm [12; 16).

2) Một hộp có 8 chiếc thẻ cùng loại, mỗi thẻ được ghi một trong các số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8; hai thẻ khác nhau được ghi hai số khác nhau. Rút ngẫu nhiên một thẻ trong hộp. Tính xác suất của biến cố A: "Số ghi trên thẻ rút được là một số chia hết cho 3".

Phân tích hướng giải và bình luận:

a) Dữ liệu từ bảng tần số ghép nhóm cho ta tần số của nhóm [12; 16) là 75.

Do đó tần số tương đối của nhóm [12;16) là: $\frac{75}{300} \cdot 100\% = 25\%$.

b) Ta thấy các kết quả xảy ra đối với việc rút ngẫu nhiên một thẻ từ hộp là đồng khả năng. Tập hợp các kết quả có thể xảy ra khi rút là:

$\Omega = \{\text{thẻ ghi số 1; thẻ ghi số 2; thẻ ghi số 3; thẻ ghi số 4; thẻ ghi số 5; thẻ ghi số 6; thẻ ghi số 7; thẻ ghi số 8}\}$. Số phần tử của tập Ω là 8.

Các kết quả thuận lợi cho biến cố A là: thẻ ghi số 3; thẻ ghi số 6.

Ta thấy có 2 kết quả thuận lợi cho biến cố này.

Khi đó xác suất của biến cố A là: $P(A) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

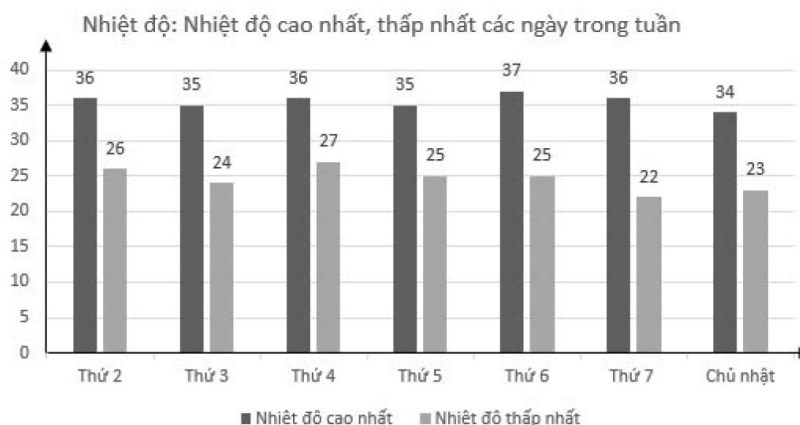
Vậy xác suất của biến cố A là $\frac{1}{4}$.

Bài toán 7.1.3. (Đề tham khảo của Sở Giáo dục và Đào tạo TP. Hồ Chí Minh cho kỳ thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT, năm học 2025 – 2026)

Biên độ nhiệt là khoảng cách chênh lệch giữa nhiệt độ cao nhất và nhiệt độ thấp nhất trong

cùng một khoảng thời gian nhất định (một ngày, một tháng, một năm, ...) của cùng một vùng địa lý. Biểu đồ cột kép dưới

đây biểu diễn nhiệt độ (độ C) các ngày trong một tuần tại TP. Hồ Chí Minh.



a) Trong tuần này, ngày có biên độ nhiệt lớn nhất của TP. Hồ Chí Minh là thứ mấy?

b) Chọn ngẫu nhiên một ngày trong tuần, tính xác suất của các biến cố sau: A: “Ngày được chọn có nhiệt độ cao nhất không quá 35°C ”.

B: “Ngày được chọn có biên độ nhiệt nhỏ hơn 12°C ”.

Phân tích hướng giải và bình luận:

a) Từ biểu đồ cột kép, ta có biên độ nhiệt của các ngày trong tuần là:

Thứ hai	Thứ ba	Thứ tư	Thứ năm	Thứ sáu	Thứ bảy
$36 - 26 = 10$	$35 - 24 = 11$	$36 - 27 = 9$	$35 - 25 = 10$	$37 - 25 = 12$	$34 - 23 = 11$

Vậy ngày có biên độ nhiệt lớn nhất trong tuần của thành phố Hồ Chí Minh là thứ 7.

b) Ta thấy số ngày có nhiệt độ cao nhất không quá 35°C là 3 (ngày).

Suy ra số phần tử của biến cố A là 3.

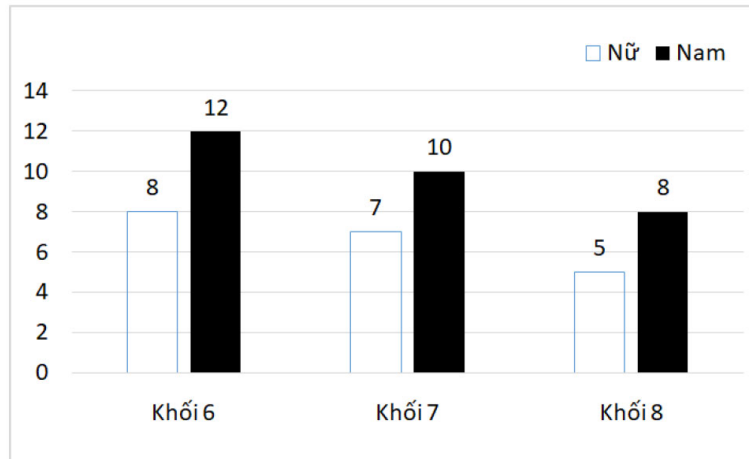
Số ngày có biên độ nhiệt nhỏ hơn 12°C là 5 (ngày), vậy $n(B) = 5$.

Từ đó tính được: $P(A) = \frac{3}{7}$ và $P(B) = \frac{5}{7}$.

Bài toán 7.1.4. (Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán, TP. Hà Nội, năm 2025)

Giải bơi của một trường trung học cơ sở ban đầu chỉ có học sinh khối 6, 7 và 8 đăng ký tham gia với số liệu học sinh được cho như trong biểu đồ cột kép ở hình bên.

Ngay trước khi giải đấu diễn ra, có thêm 6 học sinh nam khối 9 và một số học sinh nữ khối 9 đăng ký bổ sung. Biết rằng tỉ lệ học sinh nữ so với tổng số học sinh đăng ký tham gia giải



trước và sau khi các học sinh khối 9 đăng ký bổ sung là không thay đổi. Tìm số học sinh nữ khối 9 đã đăng ký thi đấu.

Phân tích hướng giải và bình luận:

Từ biểu đồ cột kép ta thấy:

Số học sinh nữ tham gia giải bơi ban đầu là: $8 + 7 + 5 = 20$ (học sinh).

Số học sinh nam tham gia giải bơi ban đầu là: $12 + 10 + 8 = 30$ (học sinh).

Tổng số học sinh ban đầu là: $20 + 30 = 50$ (học sinh).

Tỉ lệ số học sinh nữ so với tổng số học sinh tham gia là: $\frac{20}{20 + 30} = \frac{2}{5}$.

Gọi x ($x \in \mathbb{N}^*$) là số học sinh nữ khối 9 bổ sung, khi đó:

Số nữ tham gia giải là: $20 + x$ (học sinh).

Số học sinh nam là: $30 + 6 = 36$ (học sinh).

Tổng số học sinh tham gia giải là: $20 + x + 36 = 56 + x$ (học sinh).

Do tỉ lệ học sinh nữ so với tổng số học sinh đăng ký tham gia giải trước và sau khi các học sinh khối 9 đăng ký bổ sung là không thay đổi nên ta có phương trình: $\frac{20 + x}{56 + x} = \frac{2}{5} \Rightarrow x = 4$ (thỏa mãn).

Vậy có 4 học sinh nữ khối 9 đã đăng kí thi đấu.

Phần VIII. CẦN TẮC VÔ ƯU

有备无患

Trong chuyên mục này tác giả đề cập đến những lỗi thường gặp của học sinh khi giải toán: do thiếu cẩn trọng dẫn tới việc lý luận chưa chặt chẽ hoặc chưa vét hết các trường hợp nên kết quả không đầy đủ. Các dạng toán liên quan rất nhiều như: chứng minh đẳng thức, bất đẳng thức, giải phương trình, hệ phương trình, bất phương trình, hình học, lượng giác, xác suất thống kê, ... ở tất cả các cấp học từ THCS đến THPT. Chủ yếu ở đây là vẽ sai hình, thực hiện các phép toán nhân chia, nâng bậc lũy thừa... mà không chú ý điều kiện hoặc mặc nhận, bỏ quên trường hợp.

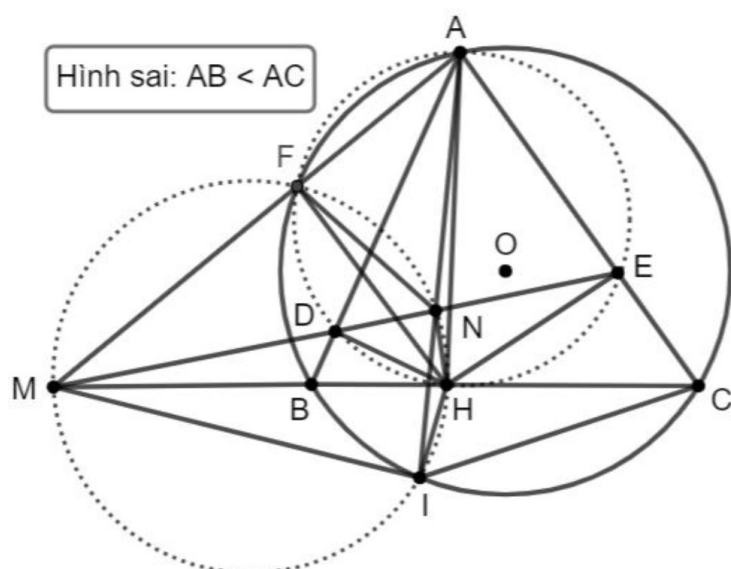
Bây giờ chúng ta sẽ cùng xem xét kỹ hơn vấn đề đã nêu qua các bài toán cụ thể dưới đây.

Bài toán 8.1. Cho tam giác ABC nhọn ($AB > AC$) nội tiếp đường tròn (O). Kẻ AH là đường cao của tam giác ABC. Gọi D và E theo thứ tự là chân đường vuông góc kẻ từ H tới AB, AC.

- a) Chứng minh tứ giác ADHE nội tiếp;
- b) Kẻ HN vuông góc với DE tại N, tia AN cắt đường tròn (O) tại I (I khác A). Chứng minh: $\widehat{AED} = \widehat{ABC}$ và $AE.AC = AN.AI$;
- c) Tia DE cắt BC tại M. Chứng minh $MI \perp HI$.

Phân tích hướng giải và bình luận:

Đây không phải bài toán khó, tuy nhiên có rất nhiều học sinh “không được điểm nào” với lý do khó chấp nhận là “vẽ sai hình”. Quả thực vô cùng đáng tiếc vì với một đề thi mà hỏng bài hình đồng nghĩa với việc chỉ đạt khoảng 6 đến 7 điểm. Khi ấy cơ hội để các em thi đỗ rất mong manh!



Có nhiều bài toán nếu vẽ sai hình sẽ không thể làm được nhưng đối với bài toán này cho dù $AB > AC$ hay $AB < AC$ thì các kết quả cần chứng minh vẫn đúng. Sự khác nhau giữa độ dài AB, AC là điều kiện để tất cả học sinh đều có hình vẽ tương đồng, nghĩa là DE cắt BC kéo dài

về phía B hoặc C (tất nhiên phải kèm theo quy ước thứ tự vẽ biên thì mới thực sự thống nhất). Cũng chính vì lý do đơn giản ấy mà nhiều em chủ quan không đọc kỹ đề hoặc không kiểm tra lại sau khi hoàn tất chứng minh (đặc biệt các em học sinh giỏi thường lướt qua đề, chỉ chú trọng đến việc làm thế nào để tìm ra lời giải nhanh nhất).

Trở lại bài toán:

a) Do $HE \perp AC$ và $HD \perp AB$ nên $\widehat{AEH} = \widehat{ADH} = 90^\circ$.

Khi đó các tam giác EAH và EDH đều là các tam giác vuông, chúng cùng nội tiếp đường tròn đường kính AH nên tứ giác $ADHE$ nội tiếp.

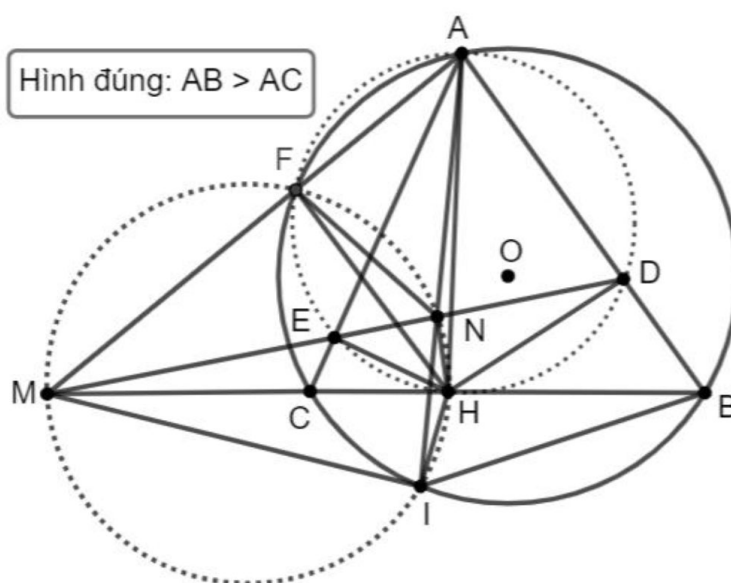
b) Như trên ta đã chứng minh được tứ giác $ADHE$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{AED} = \widehat{AHD}$ (cùng chắn cung AD).

Mà $\widehat{AHD} = \widehat{DBH}$ (cùng phụ với góc AHD) hay $\widehat{AHD} = \widehat{ABC}$.

Do vậy $\widehat{AED} = \widehat{ABC}$.

Mà $\widehat{ABC} = \widehat{AIC}$ (cùng chắn cung AC) $\Rightarrow \widehat{AEN} = \widehat{AIC}$.



Ta xét 2 tam giác AEN và AIC có: $\begin{cases} \widehat{A} \text{ chung} \\ \widehat{AEN} = \widehat{AIC} \end{cases}$ (theo chứng minh trên)

$$\Rightarrow \Delta AEN \sim \Delta AIC \text{ (g-g)} \Rightarrow \frac{AE}{AI} = \frac{AN}{AC} \Rightarrow AE.AC = AN.AI.$$

c) Trước hết ta sẽ cùng phân tích để tìm hướng giải cho bài toán:

Mặc dù đang cần chứng minh nhưng ta cứ giả sử có $MI \perp HI \Rightarrow$ tứ giác MNHI nội tiếp $\Rightarrow \widehat{HIN} = \widehat{HMN}$. Mà $\widehat{HMN} = \widehat{AHN}$ (cùng phụ với góc NHM)

$$\Rightarrow \widehat{HIN} = \widehat{AHN} \Rightarrow \Delta ANH \sim \Delta AHI \text{ (g-g)} \Rightarrow \frac{AH}{AI} = \frac{AN}{AH} \Rightarrow AN.AI = AH^2.$$

Điều này có thể chứng minh dễ dàng từ kết quả phần trên: $AN.AI = AE.AC = AH^2$ theo hệ thức lượng trong tam giác vuông HAC và đường cao HE. Đây cũng chính là điểm bắt đầu cho công việc của chúng ta!

Trở lại bài toán, theo kết quả phần (b) ta có $AE.AC = AN.AI$.

Sử dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông HAC và đường cao HE ta có $AE.AC = AH^2 \Rightarrow AN.AI = AH^2 \Rightarrow \frac{AN}{AH} = \frac{AH}{AI}$.

Xét 2 tam giác ANH và AHI có: $\begin{cases} \frac{AN}{AH} = \frac{AH}{AI} \\ \widehat{A} \text{ chung} \end{cases}$

nên $\Delta ANH \sim \Delta AHI \text{ (c-g-c)} \Rightarrow \widehat{AHN} = \widehat{AIH}$.

Mà $\widehat{AHN} = \widehat{NMH}$ (cùng phụ với góc NHM) $\Rightarrow \widehat{AIH} = \widehat{NMH}$ hay $\widehat{NIH} = \widehat{NMH}$. Đây là hai đỉnh liên tiếp của tứ giác MNHI $\Rightarrow$ MNHI là tứ giác nội tiếp.

Khi đó: $\widehat{MNH} + \widehat{MIH} = 180^\circ$.

Suy ra: $\widehat{MIH} = 180^\circ - \widehat{MNH} = 90^\circ$ hay $MI \perp HI$.

Bài toán được chứng minh.

Ngoài ra, học sinh cũng có thể căn cứ vào bài toán “giả trực tâm H” quen biết để giải bài toán trên.

Gọi F là giao điểm của AM với (O). Khi đó tứ giác BCED nội tiếp nên sử dụng bổ đề cát tuyến cắt nhau ta có:

$$MF.MA = MC.MB \text{ và } MC.MB = ME.MD \Rightarrow MF.MA = ME.MD$$

$\Rightarrow$ tứ giác ADEF nội tiếp.

Bài toán 8.3. Một công ty cần thuê xe để vận chuyển 35 tấn hàng từ bến xe đến kho cách 15 km. Đơn vị cho thuê xe chỉ có hai loại xe. Loại xe thứ nhất mỗi xe chở được 8 tấn hàng với giá thuê là 1,2 triệu đồng cho mỗi lượt vận chuyển. Loại xe thứ hai mỗi xe chở được 10 tấn hàng có giá thuê là 1,7 triệu đồng cho mỗi lượt vận chuyển. Hỏi chi phí thuê xe nhỏ nhất mà công ty phải trả để vận chuyển hết số hàng trên là bao nhiêu.

Phân tích hướng giải và bình luận:

Ta gọi x và y là số lượt mà công ty cần thuê xe 8 tấn và 10 tấn để trở hết số hàng trên. Điều kiện: $x, y \in \mathbb{N}$.

Do khối lượng hàng hóa cần vận chuyển là 35 tấn nên: $8x + 10y \geq 35$.

Tổng chi phí mà công ty phải trả là: $T = 1,2x + 1,7y$ (triệu đồng).

Từ $8x + 10y \geq 35 \Rightarrow 4x + 5y \geq 17,5$. Do $x, y \in \mathbb{N}$ nên $4x + 5y \geq 18$.

Ta biến đổi: $T = 1,2x + 1,7y = 0,3(4x + 5y) + 0,2y$.

⊙ Nếu $y = 0$ thì $4x \geq 18 \Rightarrow x \geq 4,5 \Rightarrow x \geq 5$ (do x nguyên) $\Rightarrow T \geq 6$.

⊙ Nếu $y = 1$ thì $4x \geq 13 \Rightarrow x \geq 3,25 \Rightarrow x \geq 4$ (do x nguyên)

$\Rightarrow T \geq 1,2.4 + 1,7.1 = 6,5$.

⊙ Nếu $y \geq 2$, khi đó: $T = 0,3(4x + 5y) + 0,2y \geq 0,3.18 + 0,2.2 = 5,8$.

Dấu “=” xảy ra khi $x = y = 2$ (thỏa mãn).

Từ các trường hợp trên ta thấy rằng: phí thuê xe nhỏ nhất mà công ty phải trả để vận chuyển hết số hàng trên là 5,8 triệu đồng.

Lưu ý: Đối với bài toán này học sinh không được hiểu là $8x + 10y = 35$ mà phải là $8x + 10y \geq 35$. Bên cạnh đó không được sử dụng đánh giá đồng thời $y \geq 0$ và $4x + 5y \geq 18$ để có được: $T \geq 0,3.18 + 0,2.0 = 5,4$. Bởi vì khi đó các em không thể tìm được kiện xảy ra dấu đẳng thức với x, y nguyên.

Bài toán 8.4. Cho x, y là các số thực không âm thỏa mãn $x^2 + y^2 = 1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $S = \sqrt{x} + 2\sqrt{y}$.

Phân tích hướng giải và bình luận:

Sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có:

$$S^2 = (1 \cdot \sqrt{x} + 2\sqrt{y})^2 \leq (1 + 4)(x + y) = 5(x + y).$$

Tiếp tục dùng Bunhiacopxki một lần nữa:

$$(x + y)^2 \leq 2(x^2 + y^2) = 2 \Rightarrow x + y \leq \sqrt{2}.$$

$$\text{Suy ra: } S^2 \leq 5\sqrt{2} \Rightarrow S \leq \sqrt{5\sqrt{2}}.$$

Việc đi tìm cận trên như vậy là chưa tốt bởi lẽ dấu “=” xảy ra khi

$$\begin{cases} \sqrt{x} = \frac{\sqrt{y}}{2} \\ x = y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \quad \text{hệ này vô nghiệm nên không thể kết luận GTLN của } S \text{ là } \sqrt{5\sqrt{2}}.$$

Để làm được, ta tham số hóa và viết S dưới dạng:

$$S = \sqrt{x} + 2\sqrt{y} = \frac{1}{\sqrt{a}}\sqrt{ax} + \sqrt{4y} \text{ với } a > 0.$$

Khi đó sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có:

$$S^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{a}}\sqrt{ax} + \sqrt{4y}\right)^2 \leq \left(\frac{1}{a} + 1\right)(ax + 4y) \quad (*)$$

$$\text{và } (ax + 4y)^2 \leq (a^2 + 16)(x^2 + y^2) = a^2 + 16 \Rightarrow ax + 4y \leq \sqrt{a^2 + 16}.$$

$$\text{Do đó: } S^2 \leq \left(\frac{1}{a} + 1\right)\sqrt{a^2 + 16} \Rightarrow S \leq \sqrt{\left(\frac{1}{a} + 1\right)\sqrt{a^2 + 16}}.$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi: } \begin{cases} \frac{\frac{\sqrt{ax}}{\frac{1}{\sqrt{a}}}}{a} = \frac{\sqrt{4y}}{1} \\ \frac{x}{a} = \frac{y}{4} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2\sqrt[3]{2} \\ x = \frac{1}{\sqrt{1 + 2\sqrt[3]{2}}} \\ y = \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{1 + 2\sqrt[3]{2}}} \end{cases}$$

Trở lại bài toán, lúc này các em chỉ cần chọn $a = 2\sqrt[3]{2}$ và sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki hai lần như trên sẽ thu được kết quả: giá trị lớn nhất của

$$S \text{ là } \sqrt{\left(\frac{1}{a} + 1\right)\sqrt{a^2 + 16}}.$$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT của các tỉnh (thành phố).
2. Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT Chuyên ĐHSP Hà Nội.
3. Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT Chuyên KHTN – ĐHKHTN – ĐHQGHN.
4. Đề kiểm tra kiến thức lớp 9 định kỳ của các xã (phường), tỉnh (thành phố).
5. Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ.
6. Các chuyên đề Seminar của Hội Toán học Hà Nội (HMS).

Ngoài ra có một số bài toán tham khảo và sưu tầm trên Internet nhưng chưa xác minh được rõ tác giả của chúng, do vậy không thể ghi trích dẫn ở đây. Mong rằng tác giả của những bài toán đó nếu có cầm trên tay cuốn sách này thì hết sức thông cảm. Tôi xin trân trọng cảm ơn.

MỤC LỤC

	Trang
Giới thiệu chung	3
Những điều học sinh cần lưu ý trong kỳ thi vào lớp 10 THPT	5
Các thuật ngữ và ký hiệu thường sử dụng	11
Kiến thức cần chuẩn bị	13
Phần I. Phương pháp chứng minh bất đẳng thức	21
Phần II. Phương pháp tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất	101
Phần III. Hệ thức Viète và ứng dụng	181
3.1. Tính giá trị biểu thức	183
3.2. Hệ thức liên quan giữa các nghiệm của phương trình	193
3.3. Các bài toán liên quan đến hàm số và đồ thị	222
3.4. Các bài toán không thường gặp	232
Phần IV. Phương trình, hệ phương trình	257
4.1. Phương trình	258
4.2. Hệ phương trình	293
4.3. Giải bài toán bằng cách lập phương trình, hệ phương trình	317
4.4. Các bài toán không thường gặp	329

	Trang
Phần V. Hình học	343
5.1. Một số bài toán cơ bản có nhiều ý hỏi	356
5.2. Dạng toán chứng minh thẳng hàng	377
5.3. Dạng toán chứng minh song song	408
5.4. Dạng toán chứng minh vuông góc	428
5.5. Các bài toán không thường gặp	454
5.6. Hình học trực quan	476
Phần VI. Toán thực tế	495
6.1. Các bài toán cực trị hình học	495
6.2. Các bài toán tối ưu	515
6.3. Các bài toán suy luận, trò chơi	534
6.4. Các bài toán có yếu tố thực tế khác	546
Phần VII. Một số yếu tố thống kê và xác suất	561
7.1. Một số yếu tố thống kê	561
7.2. Một số yếu tố xác suất	573
Phần VIII. Cẩn tắc vô ưu	611
Tài liệu tham khảo	648

BÍ QUYẾT

GIÀNH ĐIỂM TUYỆT ĐỐI

MÔN TOÁN

Chịu trách nhiệm xuất bản, nội dung

GIÁM ĐỐC - TỔNG BIÊN TẬP

TS. TRẦN CHÍ ĐẠT

Biên tập: NGUYỄN THU TRANG

Chế bản: NGUYỄN KIM SỞ

Sửa bản in: NGUYỄN THU TRANG

Họa sĩ bìa: HOÀNG LONG HẢI

NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC - CÔNG NGHỆ - TRUYỀN THÔNG

Website: www.nxbkhcnett.vn; book365.vn; ebook365.vn; ebook.gov.vn

Trụ sở: Tầng 6, Tòa nhà Cục Tần số vô tuyến điện

115 Trần Duy Hưng, phường Yên Hòa, TP. Hà Nội

Điện thoại: 024.35772143/41 Điện thoại Phát hành: 024.35772138

Đối tác liên kết: NGUYỄN KIM SỞ

HH1A Linh Đàm, phường Hoàng Liệt, TP Hà Nội

In 500 bản, khổ 17 × 25 cm, tại Công ty TNHH In và Thương mại Trần Gia.

Địa chỉ: Số 43, ngõ 406 đường Âu Cơ, P. Hồng Hà, TP Hà Nội.

Số xác nhận đăng ký xuất bản: 3838-2025/CXBIPH/3-153/KHCNTT.

Quyết định xuất bản số: 595/QĐ-NXB KHCNTT ngày 17 tháng 10 năm 2025.

In xong và nộp lưu chiểu năm 2025.

Mã ISBN: 978-604-45-1811-4