SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2023 – 2024

Môn thi: **TOÁN**
Ngày thi: 11/6/2023
Thời gian làm bài: 120 phút

Câu I *(2,0 điểm)*

Cho hai biểu thức $A = \dfrac{x+2}{\sqrt{x}}$ và $B = \dfrac{2\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-1} + \dfrac{3-\sqrt{x}}{x-1}$ với $x > 0,\ x \neq 1$.

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 9$.

2) Chứng minh $B = \dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$.

3) Tìm tất cả giá trị của x để $A.B = 4$.

Câu II *(2,0 điểm)*

1) *Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình*:

Theo kế hoạch, một phân xưởng phải làm xong 900 sản phẩm trong một số ngày quy định. Thực tế, mỗi ngày phân xưởng đã làm được nhiều hơn 15 sản phẩm so với số sản phẩm phải làm trong một ngày theo kế hoạch. Vì thế 3 ngày trước khi hết thời hạn, phân xưởng đã làm xong 900 sản phẩm. Hỏi theo kế hoạch, mỗi ngày phân xưởng phải làm bao nhiêu sản phẩm? (Giả định rằng số sản phẩm mà phân xưởng làm được trong mỗi ngày là bằng nhau.)

2) Một khối gỗ dạng hình trụ có bán kính đáy là $30cm$ và chiều cao là $120cm$. Tính thể tích của khối gỗ đó (lấy $\pi \approx 3,14$).

Câu III *(2,5 điểm)*

1) Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{2}{x-3} - 3y = 1 \\ \dfrac{3}{x-3} + 2y = 8 \end{cases}$.

2) Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = (m+2)x - m$.

a) Chứng minh (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

b) Gọi x_1 và x_2 là hoành độ các giao điểm của (d) và (P). Tìm tất cả giá trị của m để

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_1 + x_2 - 2}.$$

Câu IV *(3,0 điểm)*

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn $(AB < AC)$, nội tiếp đường tròn (O). Tiếp tuyến tại điểm A của đường tròn (O) cắt đường thẳng BC tại điểm S. Gọi I là chân đường vuông góc kẻ từ điểm O đến đường thẳng BC.

1) Chứng minh tứ giác $SAOI$ là tứ giác nội tiếp.

2) Gọi H và D lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ điểm A đến các đường thẳng SO và SC. Chứng minh $\widehat{OAH} = \widehat{IAD}$.

3) Vẽ đường cao CE của tam giác ABC. Gọi Q là trung điểm của đoạn thẳng BE. Đường thẳng QD cắt đường thẳng AH tại điểm K. Chứng minh $BQ.BA = BD.BI$ và đường thẳng CK song song với đường thẳng SO.

Câu V *(0,5 điểm)*

Cho hai số thực dương a và b thỏa mãn $a + b \leq 2$. Chứng minh $\dfrac{a^2}{a^2+b} + \dfrac{b^2}{b^2+a} \leq 1$.

-----------------**HẾT**-----------------

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ tên thí sinh:..Số báo danh:....................

Họ tên và chữ kí của cán bộ coi thi số 1: Họ tên và chữ kí của cán bộ coi thi số 2:

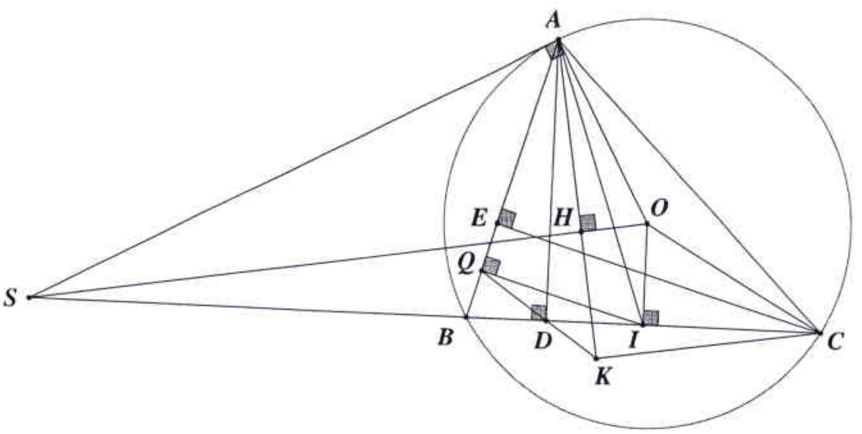
SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2023 – 2024

Môn thi: **TOÁN**
Ngày thi: 11/6/2023

ĐÁP ÁN ĐỀ THI VÀO LỚP 10 THPT

<table>
<tr><th>Câu</th><th>Ý</th><th>Đáp án</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Câu I
2,0 điểm</td><td>1)</td><td>Ta có $x = 9$ thỏa mãn điều kiện xác định của biểu thức A. Thay $x = 9$ (TMĐK) vào biểu thức A, ta có $A = \dfrac{9+2}{\sqrt{9}} = \dfrac{11}{3}$.</td></tr>
<tr><td>2)</td><td>Với điều kiện $x > 0, x \neq 1$, ta có $B = \dfrac{2\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-1} + \dfrac{3-\sqrt{x}}{x-1}$
$= \dfrac{2\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-1} + \dfrac{3-\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}$
$= \dfrac{\left(2\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+1\right)+3-\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}$
$= \dfrac{2x-2\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}$
$= \dfrac{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}$
$= \dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$.</td></tr>
<tr><td>3)</td><td>Ta có $A.B = \dfrac{2x+4}{\sqrt{x}+1}$.
$AB = 4 \Rightarrow \dfrac{2x+4}{\sqrt{x}+1} = 4 \Rightarrow 2x - 4\sqrt{x} = 0$
$\Leftrightarrow 2\sqrt{x}(\sqrt{x}-2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 4 \end{array}\right.$.
Kết hợp với các điều kiện, ta được $x = 4$.</td></tr>
<tr><td>Câu II
2,0 điểm</td><td>1)</td><td>Gọi số sản phẩm mà phân xưởng phải làm trong một ngày theo kế hoạch là x (sản phẩm). Điều kiện $x > 0$.
Thời gian dự kiến phân xưởng làm xong 900 sản phẩm là $\dfrac{900}{x}$ (ngày).
Thực tế mỗi ngày phân xưởng làm được $x + 15$ (sản phẩm).
Thời gian thực tế phân xưởng làm xong 900 sản phẩm là $\dfrac{900}{x+15}$ (ngày).
Vì phân xưởng làm xong 900 sản phẩm sớm hơn 3 ngày so với kế hoạch nên ta có phương trình $\dfrac{900}{x} - \dfrac{900}{x+15} = 3$.
Với điều kiện $x > 0$, phương trình tương đương với $x^2 + 15x - 4500 = 0$.
$\Delta = 15^2 - 4.1.(-4500) = 18225 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 135$.</td></tr>
</table>

		Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1=\frac{-15-135}{2}=-75$; $x_2=\frac{-15+135}{2}=60$. Đối chiếu với điều kiện ta được $x=60$. Vậy theo kế hoạch, mỗi ngày phân xưởng phải làm 60 sản phẩm.
	2)	Thể tích của khối gỗ là: $V=\pi R^2h\approx 3{,}14.\ 30^2.\ 120$ Vậy $V\approx 339120\,(cm^3)$.
Câu III **2,5 điểm**	1)	Điều kiện: $x\neq 3$. $\begin{cases}\frac{2}{x-3}-3y=1\\ \frac{3}{x-3}+2y=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{6}{x-3}-9y=3\\ \frac{6}{x-3}+4y=16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{6}{x-3}+4y=16\\ 13y=13\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{6}{x-3}=12\\ y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{7}{2}\\ y=1\end{cases}.$ Đối chiếu với điều kiện, ta được hệ phương trình có nghiệm là $(x;\,y)=\left(\frac{7}{2};\,1\right)$.
	2a)	Xét phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng (d) và parabol (P): $x^2=(m+2)x-m\Leftrightarrow x^2-(m+2)x+m=0$ (*). Ta có $\Delta=m^2+4$. Suy ra $\Delta>0$ với mọi giá trị của m. Do đó phương trình (*) luôn có 2 nghiệm phân biệt. Vậy (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.
	2b)	Vì x_1,x_2 là hoành độ giao điểm của đường thẳng (d) và parabol (P) nên x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình (*). Theo định lý Vi-ét, ta có $\begin{cases}x_1+x_2=m+2\\ x_1.x_2=m\end{cases}$. Từ đó $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{1}{x_1+x_2-2}\Leftrightarrow\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{1}{x_1+x_2-2}$. Suy ra $\frac{m+2}{m}=\frac{1}{m}$ (Điều kiện $m\neq 0$). $\Rightarrow m+2=-1\Leftrightarrow m=-1$. Đối chiếu với điều kiện, ta được $m=-1$.
Câu IV **3,0 điểm**	1)	 Vì SA là tiếp tuyến của (O) nên $\widehat{SAO}=90°$. Theo giả thiết ta có $OI\perp BC\Rightarrow\widehat{SIO}=90°$.

		Xét tứ giác $SAOI$ có $\widehat{SAO}+\widehat{SIO}=180°$, mà hai góc $\widehat{SAO}$ và $\widehat{SIO}$ là hai góc đối nhau nên tứ giác $SAOI$ là tứ giác nội tiếp.
	2)	Ta có ΔOAH vuông tại H nên $\widehat{OAH}=90°-\widehat{HOA}$. Ta có ΔIAD vuông tại D nên $\widehat{IAD}=90°-\widehat{DIA}$. Vì $\widehat{HOA}=\widehat{DIA}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung SA của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $SAOI$ nên $\widehat{OAH}=\widehat{IAD}$.
	3)	Ta có Q,I lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng $BE,BC \Rightarrow QI$ là đường trung bình của $\Delta BEC \Rightarrow QI\,//\,EC$. Vì $EC\perp AB$ và $QI\,//\,EC$ nên $QI\perp AB$, do đó $\widehat{BQI}=90°$. Xét ΔBDA và ΔBQI cùng có chung $\widehat{ABC}$, mặt khác $\widehat{BDA}=\widehat{BQI}=90°$. Suy ra $\Delta BDA \backsim \Delta BQI$ (g.g). $\Rightarrow \dfrac{BA}{BI}=\dfrac{BD}{BQ}\Rightarrow BQ.\,BA=BD.\,BI.$ Ta có $\widehat{AQI}=\widehat{ADI}=90°$ nên tứ giác $AQDI$ là tứ giác nội tiếp. Suy ra $\widehat{KDC}=\widehat{BAI}$. (1) Xét ΔBAD vuông tại đỉnh D có $\widehat{BAD}=90°-\widehat{ABC}$.$(2a)$ Xét ΔOAC có $OA=OC(=R)$. Suy ra ΔOAC cân tại đỉnh O. Suy ra $\widehat{OAC}=90°-\dfrac{1}{2}\widehat{AOC}$.$(2b)$ Trong đường tròn (O), ta có $\widehat{ABC}=\dfrac{1}{2}\widehat{AOC}\,(2c)$ (tính chất góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung AC). Từ $(2a),(2b)$ và $(2c)$ suy ra $\widehat{BAD}=\widehat{OAC}$. Theo chứng minh ở ý 2, có $\widehat{IAD}=\widehat{OAH}$. Suy ra $\widehat{BAD}+\widehat{IAD}=\widehat{OAC}+\widehat{OAH}\Rightarrow\widehat{BAI}=\widehat{KAC}$.(2) Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{KDC}=\widehat{KAC}$. Xét tứ giác $ADKC$ có $\widehat{KDC}=\widehat{KAC}$, mà hai đỉnh A,D kề nhau, suy ra tứ giác $ADKC$ là tứ giác nội tiếp. Suy ra $\widehat{AKC}=\widehat{ADC}\Rightarrow\widehat{AKC}=90°\Rightarrow CK\perp AH$. Ta có $SO\perp AH$ và $CK\perp AH$ nên $CK\,//\,SO$.
Câu V **0,5 điểm**		Do $a>0,b>0$ nên bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với $a^2(b^2+a)+b^2(a^2+b)\le(b^2+a)(a^2+b)$ $\Leftrightarrow a^2b^2+a^3+a^2b^2+b^3\le a^2b^2+b^3+a^3+ab$ $\Leftrightarrow a^2b^2\le ab\Leftrightarrow ab(ab-1)\le 0\Leftrightarrow ab\le 1$ (vì $ab>0$). Do $a>0,b>0$ và $a+b\le 2$ nên $2\sqrt{ab}\le 2$. Suy ra $ab\le 1$ (đpcm).

................**HẾT**..............

LƯU Ý

Trong trường hợp, vì một số lí do nào đó, thí sinh hiểu đề bài câu III.1 là $\begin{cases} -\dfrac{2}{x-3} - 3y = 1 \\ \dfrac{3}{x-3} + 2y = 8 \end{cases}$, *các bước giải của ý III.1 được thể hiện như sau:*

Câu	Đáp án
Câu III.1 **1,0 điểm**	Điều kiện: $x \neq 3$. $\begin{cases} -\dfrac{2}{x-3} - 3y = 1 \\ \dfrac{3}{x-3} + 2y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{6}{x-3} - 9y = 3 \\ \dfrac{6}{x-3} + 4y = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{6}{x-3} + 4y = 16 \\ -5y = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{6}{x-3} = \dfrac{156}{5} \\ y = -\dfrac{19}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{83}{26} \\ y = -\dfrac{19}{5} \end{cases}$. Đối chiếu với điều kiện, ta được hệ phương trình có nghiệm là $(x;\, y) = \left(\dfrac{83}{26}; -\dfrac{19}{5}\right)$.

................HẾT.............