VIỆT NAM TOÁN HỌC

CÁC ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CỦA THÀNH PHỐ HÀ NỘI

ĐỀ SỐ 4 - NĂM 2013

Thời gian làm bài: 120 phút

Bài 1. (2,0 điểm)

Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+x}$ với $x > 0$.

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 64$.
2) Rút gọn biểu thức B.
3) Tìm tất cả các giá trị của x để $\frac{A}{B} > \frac{3}{2}$.

Bài 2. (2,0 điểm)

Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:

Quãng đường từ A đến B dài 90km. Một người đi xe máy từ A đến B. Khi đến B, người đó nghỉ 30 phút rồi quay trở về A với vận tốc lớn hơn vận tốc lúc đi là 9km/h. Thời gian kể từ lúc bắt đầu đi từ A đến lúc trở về đến A là 5 giờ. Tính vận tốc xe máy lúc đi từ A đến B.

Bài 3. (2,0 điểm)

1) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3(x+1)+2(x+2y)=4 \\ 4(x+1)-(x+2y)=9 \end{cases}$
2) Cho đường thẳng (d): $y = mx - \frac{1}{2}m^2 + m + 1$ và parabol (P): $y = \frac{1}{2}x^2$.
   a) Với $m = 1$, xác định tọa độ các giao điểm A, B của (d) và (P)
   b) Tìm các giá trị của m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 sao cho $|x_1 - x_2| = 2$.

Bài 4. (3,5 điểm)

Cho đường tròn (O) và điểm A nằm bên ngoài (O). Kẻ hai tiếp tuyến AM, AN với đường tròn (O) (M, N là các tiếp điểm). Một đường thẳng d đi qua A cắt đường tròn (O) tại hai điểm B và C (AB<AC, d không đi qua tâm O).

1) Chứng minh rằng tứ giác AMON nội tiếp.
2) Chứng minh rằng $AN^2 = AB.AC$.
   Tính độ dài đoạn thẳng BC khi AB = 4cm, AN = 6cm.
3) Gọi I là trung điểm của BC. Đường thẳng NI cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai T. Chứng minh rằng MT//AC.
4) Hai tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B, C cắt nhau ở K. Chứng minh rằng K thuộc một đường thẳng cố định khi d thay đổi và thỏa mãn điều kiện đề bài.

Bài 5. (0,5 điểm)

Với a,b,c là các số dương thỏa mãn điều kiện a + b + c + ab + bc + ca = 6abc. Chứng minh rằng: $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \geq 3$.

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. Với $x > 0$, cho hai biểu thức $A = \frac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}}$.

a) Tính giá trị biểu thức A khi $x = 64$.

b) Rút gọn biểu thức B.

c) Tính x để $\frac{A}{B} > \frac{3}{2}$.

Lời giải.

a) Thay $x = 64$ (thỏa mãn) vào biểu thức A ta được

$$A = \frac{2+\sqrt{64}}{\sqrt{64}} = \frac{2+8}{8} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

b) Mẫu thức chung của biểu thức B là: $\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)$.

$$\begin{aligned} B &= \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}} \\ &= \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} + \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} \\ &= \frac{x-1+2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} \\ &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} \\ &= \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1} \end{aligned}$$

c) Ta có $\frac{A}{B} > \frac{3}{2}$ thì

$$\frac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} > \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} > \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{2(\sqrt{x}+1)}{2\sqrt{x}} - \frac{3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} > 0 \Leftrightarrow \frac{2-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} > 0$$

Ta thấy $2\sqrt{x} > 0$ suy ra $\frac{2-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} > 0 \Leftrightarrow 2-\sqrt{x} > 0 \Leftrightarrow 2 > \sqrt{x} \Leftrightarrow x < 4$.
Vạy $0 < x < 4$ thì $\frac{A}{B} > \frac{3}{2}$.

Câu 2. Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình:
Quãng đường từ A đến B dài 90 km. Một người đi xe máy từ A đến B. Khi đến B, người đó nghĩ 30 phít rồi quay trở về A với vận tốc lớn hơn vận tốc lúc đị là 9 km/h. Thời gian kể từ lúc bất đầu đi tủ A đến lúc trở về đến A là 5 giờ. Tính vận tốc xe máy lúc đi từ A đến B.
Lời giải.
Gọi vận tốc xe máy lúc đi là x(km/h) (Điều kiên: $x > 0$).
Vì vần tốc xe máy lúc về lớn hơn vận tốc lúc đi là 9(km/h) nên vận tốc lúc về là $x+9$(km/h).

Suy ra thời gian lúc đi là $\frac{90}{x}$ (giờ). Thời gian lúc về là $\frac{90}{x+9}$ (giờ).
Khi đến B xe nghỉ lại 30 phút $= \frac{1}{2}$ giờ. Mà tổng thời gian cả đi và về là 5 giờ nên ta có phương trình

$$\frac{90}{x} + \frac{90}{x+9} + \frac{1}{2} = 5 \Leftrightarrow 9x^2 - 279x - 1620 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 31x - 180 = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -5(\text{ Loaii}) \\ x = 36\ (\text{TM}) \end{array}\right.$$

Vậy vận tốc xe máy lúc đi là 36 km/h.

Câu 3.

1 Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 3(x+1)+2(x+2y)=4 \\ 4(x+1)-(x+2y)=9 \end{cases}$.

2 Cho parabol $(P): y = \frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng (d): $y = mx - \frac{1}{2}m^2 + m + 1$.
(a) Với $m = 1$, xác định tọa độ giao điểm A, B của (d) và (P).
(b) Tìm các giá trị của m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 sao cho: $|x_1 - x_2| = 2$.
Lời giải.

3 $\begin{cases} 3(x+1)+2(x+2y)=4 \\ 4(x+1)-(x+2y)=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x+4y=1 \\ 3x-2y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$.
Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x; y) = (1; -1)$.

(a) Thay $m = 1$ vào (d) ta có $y = x - \frac{1}{2} + 2 = x + \frac{3}{2}$.
Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P)

$$\frac{1}{2}x^2 = x + \frac{3}{2} \Leftrightarrow x^2 = 2x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3 \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x_1 = -1, x_2 = 3$.

- Với $x = -1$ thay vào (P): $y = \frac{1}{2} \Rightarrow A\left(-1; \frac{1}{2}\right)$.
- Với $x = 3$ thay vào (P): $y = \frac{9}{2} \Rightarrow B\left(3; \frac{9}{2}\right)$.

(b) Xét phương trình hoành độ của (d) và (P) ta có:

$$\frac{1}{2}x^2 = mx - \frac{1}{2}m^2 + m + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m^2 - 2m - 2.$$

Xét $\Delta' = m^2 - (m^2 - 2m - 2) = 2m + 2$.
Để (d) và (P) giao nhau tại hai điểm phân biệt thì $\Delta' > 0 \Leftrightarrow 2m + 2 > 0 \Leftrightarrow m > -1$.
Theo Vi-et ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 \cdot x_2 = m^2 - 2m - 2 \end{cases}$.
Theo bài ra ta có:

$$\begin{aligned} |x_1 - x_2| = 2 \quad &\Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 4 \\ &\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 4 \\ &\Leftrightarrow (2m)^2 - 4(m^2 - 2m - 2) = 4 \\ &\Leftrightarrow 2m + 2 = 1 \\ &\Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Vậy $m = -\frac{1}{2}$ thỏa mãn điều kiện bài toán.

Câu 4. Cho đường tròn (O) và điểm A nằm bên ngoài (O). Kẻ hai tiếp tuyến AM, AN với đường tròn (O). Một đường thẳng d đi qua A cắt đường tròn (O) tại hai điểm B và $C(AB < AC$, d không đi qua tâm $O)$.

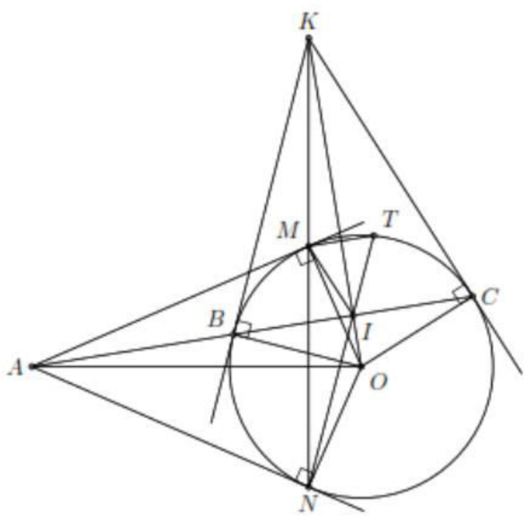
a) Chứng minh tứ giác $AMON$ nội tiếp.

b) Chứng minh $AN^2 = AB \cdot AC$. Tính độ dài đoạn thẳng BC khi $AB = 4$ cm, $AN =$ 6 cm.

c) Gọi I là trung điểm BC. Đường thẳng NI cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai T. Chứng minh: $MT // AC$.

d) Hai tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B và C cắt nhau tại K. Chứng minh K thuộc một đường thẳng cố định khi d thay đổi và thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Lời giải.



a) Ta có $\widehat{AMO} = \widehat{AMO} = 90°$ (Tính chất tiếp tuyến).

Do đó: $\widehat{AMO} + \widehat{ANO} = 180°$, mà hai góc này ở vị trí đối nhau nên tứ giác $AMON$ nội tiếp.

b) Xét $\triangle AMB$ và $\triangle ACM$ có

- $\widehat{MAC}$ chung
- $\widehat{MCA} = \widehat{AMB}$ (cùng chắn cung $\widehat{MB}$)
  Suy ra $\triangle AMB \sim \triangle ACM$.
  $\Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AC}{AM}$ (Tính chất tam giác đồng dạng)
  $\Rightarrow AM^2 = AB \cdot AC$.
  Mà $AM = AN$ (Tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau).
  Vậy $AN^2 = AB \cdot AC$(Đpcm) .
  Ta có $AN^2 = AB \cdot AC \Rightarrow 36 = 4 \cdot AC \Rightarrow AC = 9($ cm$)$.
  Mà $AC = AB + BC \Rightarrow BC = AC - AB = 9 - 4 = 5($ cm$)$.

c) Vì I là trung điểm của dây cung BC không đi qua tâm O nên $OI \perp BC$ hay $\widehat{AIO} = 90^\circ$, như vậy I và N cùng nhìn đoạn AO dưới góc vuông nên A, N, O, I cùng nằm trên một đường tròn đường kính AO, do đó: $\widehat{AIN} = \widehat{AON}$ (cùng chắn cung $\widehat{NA}$).

Mặt khác $\widehat{MTN} = \frac{1}{2}\widehat{MON} = \widehat{AON}$. Suy ra $\widehat{MTN} = \widehat{AIN}$ và chúng ở vị trí đồng vị nên $MT//AC$ (đpcm).

d) Xét $\Delta\ BOK$ vuông tại B (Tính chất tiếp tuyến), có đường cao BI nên $OB^2 = OI.OK$ mà $OB = OM \Rightarrow OM^2 = OI.OK \Rightarrow \frac{OM}{OI} = \frac{OK}{OM}$.

Góc MOI chung nên $\Delta\ OIM \backsim \Delta\ OMK$(c – g – c). Từ đó suy ra

$$\widehat{MIO} = \widehat{OMK}$$

Ta có: $OM = ON$ nên

$$\widehat{OMN} = \widehat{ONM}$$

Vì bốn điểm M, N, I, O cùng nằm trên một đường tròn đường kính AO và từ (6) nên

$$\widehat{NMO} + \widehat{MIO} = \widehat{MNO} + \widehat{MIN} = 180^\circ$$

Từ (5) và (7), suy ra: $\widehat{NMO} + \widehat{KMO} = 180^\circ$, do đó ba điểm M, N, K thẳng hàng hay suy ra K luôn nằm trên đường thẳng MN cố định khi d thay đổi.

Câu 5. Vơi a, b, c là các số dương thỏa mãn điều kiện $a + b + c + ab + bc + ca = 6abc$. Chứng minh: $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq 3$

Lời giải

$$\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq \frac{2}{ab} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) \geq \frac{1}{ab}$$

Theo bất đẳng Cauchy ta có

- $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) \geq \frac{1}{ab}; \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) \geq \frac{1}{bc}; \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}\right) \geq \frac{1}{ac}$
- $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2} + 1\right) \geq \frac{1}{a}; \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b^2} + 1\right) \geq \frac{1}{b}; \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c^2} + 1\right) \geq \frac{1}{c}$

  Cộng lần lượt các vế

$$\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) \geq \frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$
$$\Leftrightarrow \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) \geq \frac{c + b + a + bc + ac + ab}{abc}$$
$$\Leftrightarrow \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) \geq 6$$
$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) \geq 6 - \frac{3}{2} = 9$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right) \geq 3.$$

Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c = 1$ (đpcm).

==

Chúc các em luyện tập và thi đạt kết quả tốt!