Một số chuyên đề

TOÁN NÂNG CAO DÀNH CHO HỌC SINH PHỔ THÔNG

www.toanhocvietnam.com

Tác giả: **Nguyễn Kim Sổ**

Hội Toán học Việt Nam

CÁC KÝ HIỆU TOÁN HỌC THÔNG DỤNG DÙNG TRONG TÀI LIỆU

1. **IMO** : Cuộc thi học sinh giỏi toán quốc tế.
2. **VMO** : Kỳ thi học sinh giỏi quốc gia Việt Nam.
3. **ĐHKHTN** : Đại học Khoa Học Tự Nhiên.
4. **ĐHSPHN** : Đại học Sư Phạm Hà Nội.
5. **N** : Tập số tự nhiên.
6. **N*** : Tập các số nguyên dương.
7. **Z** : Tập các số nguyên.
8. **Q** : Tập số hữu tỷ.
9. **R** : Tập số thực.
10. Ø : Tập rỗng.
11. **a ⋮ b** : a chia hết cho b.
12. **d|m** : d là ước số của m.
13. **ƯCLN(a; b)** : Ước số chung lớn nhất của 2 số a và b.
14. **BCNN(a; b)** : Bội số chung nhỏ nhất của 2 số a và b.
15. **(a; b) = 1** : Hai số a và b nguyên tố cùng nhau.
16. $\sum_{i=1}^{n} x_i$: Tổng $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ (tổng Sigma).
17. $\prod_{i=1}^{n} x_i$: Tích $x_1 . x_2 \ldots x_n$.
18. **n!** : Tích n số nguyên dương đầu tiên.
19. **[x]** : Phần nguyên của số thực x, là số nguyên không vượt quá x.
20. **{x}** : Phần lẻ của số thực x, {x} = x – [x].
21. **BĐT** : Bất đẳng thức.
22. **VT** : Vế trái.
23. **VP** : Vế phải.

Phương pháp QUY NẠP TOÁN HỌC…

Để chứng minh những mệnh đề liên quan đến số tự nhiên $n \in N^*$ là đúng với mọi n(hoặc bắt đầu từ một số nào đó) mà không thể thử trực tiếp được bạn có thể nghĩ tới phương pháp quy nạp. Cụ thể như sau:

Xét mệnh đề P(n) phụ thuộc vào số tự nhiên n. Để chứng minh một mệnh đề P(n) đúng với mọi $n \geq n_0$ (n_0 là số tự nhiên cho trước) thì ta thực hiện theo các bước dưới đây:

Bước 1: Kiểm tra P(n) đúng với $n = n_0$.

Bước 2: Giả sử P(n) đúng tới n = k, ($k \geq n_0$)

Bước 3: Ta cần chứng minh P(n) đúng khi n = k + 1.

Kết luận: Theo nguyên lí quy nạp toán học, bài toán được chứng minh.

Từ lập luận trên có thể hiểu nôm na thế này: khi n bé, ta dễ dàng kiểm tra được mệnh đề đúng, giả sử tới n = 5 chẳng hạn, khi đó theo cách làm trên sẽ khẳng định được n = 6 cũng đúng, n = 6 đúng thì kéo theo n = 7 cũng đúng… cứ mãi như vậy, nghĩa là đúng với mọi số nguyên dương n!

Nói như thế nhưng không phải "Quy nạp toán học" là công cụ đa năng, có thể giải được tất cả các bài toán liên quan đến điều kiện "đúng với mọi n" mà nó cũng chỉ là một trong những phương pháp giải toán, được sử dụng trong một số bài toán nhất định.

Chúng ta sẽ xem xét các ví dụ sau để hiểu rõ hơn cách thực hiện.

Bài toán 1:
Cho $S_n = 2^{3n+1} + 2^{3n-1} + 1$, với n là số nguyên dương.
Chứng minh rằng S_n luôn chia hết cho 7.

[Đề thi Olympic lớp 8 quận Hoàng Mai – Hà Nội 2018 – 2019]

Lời giải:

Bài toán này có thể giải bằng cách phân tích và dùng đồng dư thức cho kết quả khá nhanh. Tuy nhiên chúng ta cũng có thể dùng quy nạp toán học như sau:

Dễ nhận thấy $S_1 = 2^{3.1+1} + 2^{3.1-1} + 1 = 21 \vdots 7$, $S_2 = 2^{3.2+1} + 2^{3.2-1} + 1 = 161 \vdots 7$.

Giả sử bài toán đúng tới n = k(k ≥ 2) nghĩa là: $S_k = 2^{3k+1} + 2^{3k-1} + 1 \vdots 7$.

Khi đó:

$S_{k+1} = 2^{3(k+1)+1} + 2^{3(k+1)-1} + 1 = 2^3.2^{3k+1} + 2^3.2^{3k-1} + 1 = 2^{3k+1} + 2^{3k-1} + 1 + 7(2^{3k+1} + 2^{3k-1}) = S_k + 7.(2^{3k+1} + 2^{3k-1})$

Vì $S_k \vdots 7$(theo giả thiết quy nạp) và $7.(2^{3k+1} + 2^{3k-1}) \vdots 7$ suy ra $S_{k+1} \vdots 7$ nghĩa là bài toán cũng đúng với n = k + 1.

Theo nguyên lý quy nạp, bài toán được chứng minh.

Bài toán 2:
Cho x là số thực dương và n là số nguyên dương.
Chứng minh bất đẳng thức $\frac{x^n(x^{n+1}+1)}{x^n+1} \le (\frac{x+1}{2})^{2n+1}$
Đẳng thức xảy ra khi nào?

[Đề thi VMO năm 2010 – 2011]

Lời giải:

Bài toán này có nhiều lời giải khác nhau, tuy nhiên để làm sáng tỏ hơn về quy nạp toán học, chúng ta sẽ sử dụng nó để chứng minh bài toán đúng với mọi n như sau:

* Với n = 1, bất đẳng thức đã cho trở thành $\frac{x(x^2+1)}{x+1} \le (\frac{x+1}{2})^3$

Sử dụng BĐT Cauchy: $x(x^2+1) = \frac{1}{2}(2x)(x^2+1) \le \frac{1}{2}(\frac{x^2+2x+1}{2})^2 = \frac{(x+1)^4}{8}$

Suy ra $\frac{x(x^2+1)}{x+1} \le (\frac{x+1}{2})^3$. Dấu "=" xảy ra khi x = 1.

* Giả sử BĐT đúng tới n = k: $\frac{x^k(x^{k+1}+1)}{x^k+1} \le (\frac{x+1}{2})^{2k+1}$

Khi đó $(\frac{x+1}{2})^{2(k+1)+1} = (\frac{x+1}{2})^{2k+1}(\frac{x+1}{2})^2$ kết hợp với giả thiết qui nạp suy ra: $(\frac{x+1}{2})^{2(k+1)+1} \ge \frac{x^k(x^{k+1}+1)}{x^k+1}(\frac{x+1}{2})^2$.

Ta sẽ chứng minh $\frac{x^k(x^{k+1}+1)}{x^k+1}(\frac{x+1}{2})^2 \ge \frac{x^{k+1}(x^{k+2}+1)}{x^{k+1}+1}$, thật vậy:

$$\frac{x^k(x^{k+1}+1)}{x^k+1}(\frac{x+1}{2})^2 \ge \frac{x^{k+1}(x^{k+2}+1)}{x^{k+1}+1} \Leftrightarrow \frac{x^{k+1}+1}{x^k+1}(\frac{x+1}{2})^2 \ge \frac{x(x^{k+2}+1)}{x^{k+1}+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+1)^2}{4x} \ge \frac{(x^k+1)(x^{k+2}+1)}{(x^{k+1}+1)^2} \Leftrightarrow \frac{(x+1)^2}{4x} - 1 \ge \frac{(x^k+1)(x^{k+2}+1)}{(x^{k+1}+1)^2} - 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{4x} \ge \frac{x^{k+2} - 2x^{k+1} + x^k}{(x^{k+1}+1)^2} = \frac{x^k(x^2-2x+1)}{(x^{k+1}+1)^2} = \frac{x^k(x-1)^2}{(x^{k+1}+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{4x} - \frac{x^k(x-1)^2}{(x^{k+1}+1)^2} \ge 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(\frac{1}{4x} - \frac{x^k}{(x^{k+1}+1)^2}) \ge 0$$

$\Leftrightarrow (x-1)^2\frac{(x^{k+1}+1)^2 - 4x^{k+1}}{(x^{k+1}+1)^2} \ge 0 \Leftrightarrow (x-1)^2\frac{(x^{k+1}-1)^2}{(x^{k+1}+1)^2} \ge 0$, bất đẳng thức này hiển nhiên đúng. Nghĩa là BĐT $(\frac{x+1}{2})^{2(k+1)+1} \ge \frac{x^{k+1}(x^{k+2}+1)}{x^{k+1}+1}$ cũng đúng với n = k + 1. Theo nguyên lý qui nạp, bài toán được chứng minh.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi x = 1.

Bài toán 3:
Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n ≥ 2 ta có bất đẳng thức:
$S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$.

Lời giải:

Ta dễ dàng kiểm tra được với n = 2 thì $S_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12} = \frac{14}{24} > \frac{13}{24}$, bất đẳng thức đã cho đúng.

Giả sử bài toán đúng tới n = k(k ≥ 2), nghĩa là $S_k = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \dots + \frac{1}{2k} > \frac{13}{24}$

Ta sẽ chứng minh bài toán đúng với n = k + 1. Thật vậy:

Xét hiệu $S_{k+1} - S_k = \left(\frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \dots + \frac{1}{2k+2}\right) - \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \dots + \frac{1}{2k}\right) = \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2}$ $= \frac{1}{(2k+1)(2k+2)} > 0$, suy ra $S_{k+1} > S_k$ mà $S_k > \frac{13}{24}$ theo giả thiết quy nạp ⇒ $S_{k+1} > \frac{13}{24}$, hay bài toán cũng đúng với n = k + 1.

Theo nguyên lý quy nạp ta có điều cần chứng minh.

Trên đây, các bạn đã theo dõi một số khái niệm và phương pháp chứng minh cơ bản, thường dùng nhất trong toán học phổ thông. Bây giờ chúng ta sẽ đi vào từng chuyên đề cụ thể.

Hà Nội, ngày 15 tháng 07 năm 2020

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. X. V. Cônhiagin, G. A. Tônôian, I. F. Sarưghin: Các đề thi vô địch toán của các nước (Nguyễn Đễ, Nguyễn Khánh Nguyên dịch từ tiếng Nga), Nhà xuất bản Hải Phòng, 1993.

2. Đề thi HSG các cấp của các quận(huyện), tỉnh(thành phố) trên cả nước.

3. Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ.

4. Các chuyên đề SEMINAR Hội toán học Hà Nội.

5. Các website về Toán học trong nước và nước ngoài.