Một số chuyên đề

TOÁN NÂNG CAO DÀNH CHO HỌC SINH PHỔ THÔNG

w w w . t o a n h o c v i e t n a m . c o m

Tác giả: **Nguyễn Kim Số**

Hội Toán học Việt Nam

CÁC KÝ HIỆU TOÁN HỌC THÔNG DỤNG DÙNG TRONG TÀI LIỆU

1. **IMO** : Cuộc thi học sinh giỏi toán quốc tế.
2. **VMO** : Kỳ thi học sinh giỏi quốc gia Việt Nam.
3. **ĐHKHTN** : Đại học Khoa Học Tự Nhiên.
4. **ĐHSPHN** : Đại học Sư Phạm Hà Nội.
5. **N** : Tập số tự nhiên.
6. **N*** : Tập các số nguyên dương.
7. **Z** : Tập các số nguyên.
8. **Q** : Tập số hữu tỷ.
9. **R** : Tập số thực.
10. ∅ : Tập rỗng.
11. **a ⋮ b** : a chia hết cho b.
12. **d|m** : d là ước số của m.
13. **ƯCLN(a; b)** : Ước số chung lớn nhất của 2 số a và b.
14. **BCNN(a; b)** : Bội số chung nhỏ nhất của 2 số a và b.
15. **(a; b) = 1** : Hai số a và b nguyên tố cùng nhau.
16. $\sum_{i=1}^{n} x_i$: Tổng $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ (tổng Sigma).
17. $\prod_{i=1}^{n} x_i$: Tích $x_1 . x_2 \ldots x_n$.
18. **n!** : Tích n số nguyên dương đầu tiên.
19. **[x]** : Phần nguyên của số thực x, là số nguyên không vượt quá x.
20. **{x}** : Phần lẻ của số thực x, {x} = x – [x].
21. **BĐT** : Bất đẳng thức.
22. **VT** : Vế trái.
23. **VP** : Vế phải.

Vài điều suy nghĩ…

từ bài toán của GS. Nguyễn Văn Mậu

Theo Bertrand Russell: *"Toán học không chỉ sở hữu chân lí mà còn ẩn chứa bên trong đó vẻ đẹp tối thượng, một vẻ đẹp lạnh lùng và mộc mạc, giống như một bức điêu khắc, thuần khiết tinh diệu và có khả năng đạt đến sự hoàn hảo chặt chẽ mà chỉ có thứ nghệ thuật vĩ đại nhất mới có thể thể hiện"*. Nét đẹp đó đến từ những con số, từng cách chứng minh. Người ta nói rằng các nhà toán học miêu tả các phương pháp chứng minh của mình một cách thanh nhã, phụ thuộc vào nội dung của bài toán, họ có thể:

- Chứng minh bằng việc sử dụng một cách ít nhất các giả thiết hay kết quả ban đầu.

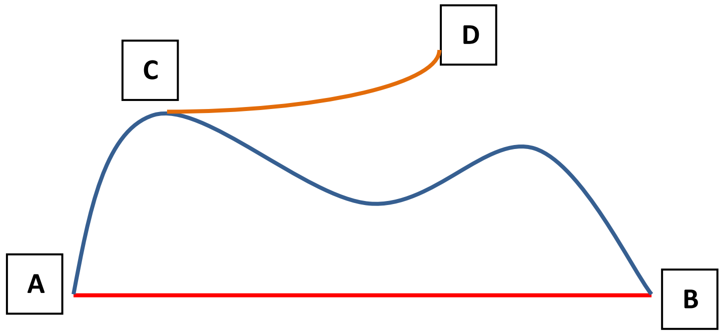
- Chứng minh bằng cách biến đổi một cách ngạc nhiên một kết quả từ những định lý tưởng chừng như không có mối liên hệ gì với bài toán.

- Chứng minh bằng một phương pháp hay hướng đi hoàn toàn mới mẻ.

- Chứng minh theo một phương pháp tổng quát, từ đó có thể giải quyết được nhiều bài toán tương tự khác…

Hay như GS. Hà Huy Khoái trong bài giảng "**NHỮNG CÁCH CHỨNG MINH KHÁC NHAU CỦA ĐỊNH LÝ EUCLID VỀ SỰ VÔ HẠN CỦA TẬP HỢP CÁC SỐ NGUYÊN TỐ**" cũng đã chỉ ra: *"…leo lên đỉnh núi không phải là việc duy nhất của chúng ta(vì lên đó có thể chỉ còn việc…quay về!) mà chúng ta còn muốn tìm kiếm những điều thú vị trên con đường đi đến đó, còn muốn ngắm nhìn xung quanh, để hiểu rõ hơn vị trí mà ta đang hướng đến trong khung cảnh chung của cả khu rừng…*"

Với học sinh, sinh viên điều đó càng quan trọng, chúng ta nên khuyến khích sự tìm tòi, sáng tạo trong học tập cũng như nghiên cứu thông qua nhiều cách tiếp cận khác nhau, đi từ A đến B theo đường thẳng thường sẽ được coi là tối ưu, nhưng nếu ai đó đi vòng qua C để đến B thì chưa hẳn đã là không tốt, bởi lần sau nếu đi tới D mà đã đến C thì đôi khi có lợi hơn nhiều.



Trở lại với bài toán của GS. Nguyễn Văn Mậu đưa ra trong mục **8: Phương pháp tam thức bậc 2, bài toán 8.1**(tam thức bậc 2 định hướng) tại seminar Hội toán học Hà Nội 09/03/2023:

Bài toán *(Nguyễn Văn Mậu)*:
Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $x^2 + 2y^2 + 5z^2 = 1$.
Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $S = xy + yz + zx$.

Đây là bài toán khá khó với các bạn học sinh(kể cả với các bạn sinh viên khi dùng phương pháp nhân tử Lagrange - giải một hệ phương trình phức tạp để tìm các điểm dừng thì việc khôi phục bài toán ban đầu khi biết điều kiện đó cũng không dễ chút nào). **Thầy đã đưa ra lời giải tuyệt vời bằng cách cho $z = 0$ để có được định hướng: chỉ xét $S \geq \frac{1}{2\sqrt{2}}$ và từ đó sử điều kiện tồn tại nghiệm của phương trình bậc 2 tìm ra giá trị lớn nhất của S.**

Vậy ngoài các cách đó ra liệu còn phương pháp nào khác nữa?

Nếu suy nghĩ và đứng ở vai trò người ra đề có thể nhận thấy: bằng phương pháp **HỆ SỐ BẤT ĐỊNH** chúng ta cũng sẽ có lời giải đơn giản, có thể áp dụng được cho học sinh lớp 7 — 8(phương pháp này cũng không phải là mới mẻ và đã có rất nhiều tác giả đã viết).

Ta hãy bắt đầu đơn giản thông qua việc theo dõi một cách chứng minh khác cho bất đẳng thức(BĐT) Nesbitt (một trường hợp đặc biệt của BĐT Shapiro – đưa ra năm 1954):

Bài toán 1 *(BĐT Nesbitt):*
Cho a, b, c là 3 số thực dương. Chứng minh rằng $P = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$

Lời giải:

Đây là BĐT quen thuộc, có rất nhiều cách chứng minh như dùng Cauchy, Bunhiacopxki, Cauchy–Schwarz dạng Engel, Chebyshev, Jensen(cho hàm lõm)… hoặc đơn giản hơn như đổi biến, biến đổi tương đương. Nhưng ở bài viết này chúng ta sẽ làm khác đi một chút:

Bằng cách chuẩn hóa a + b + c = 1, khi đó $P = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = \frac{a}{1-a} + \frac{b}{1-b} + \frac{c}{1-c}$ với a, b, c $\in(0; 1]$.

Ta sẽ chứng minh $\frac{a}{1-a} \geq \frac{9}{4}a - \frac{1}{4}$ với $\forall$ a $\in(0; 1]$ (*)

Thật vậy: $\frac{a}{1-a} \geq \frac{9}{4}a - \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{(3a-1)^2}{4(1-a)} \geq 0$, BĐT đúng.

Hoàn toàn tương tự $\frac{b}{1-b} \geq \frac{9}{4}b - \frac{1}{4}$; $\frac{c}{1-c} \geq \frac{9}{4}c - \frac{1}{4}$ từ đó:

$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{9}{4}(a+b+c) - \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi a = b = c. Bài toán được chứng minh.

Vấn đề với học sinh là ở chỗ: làm thế nào để tìm ra được bất đẳng thức phụ (*) nói trên?

Đối với lớp 7 – 8 có thể định hướng như sau:

Ta sẽ đi tìm các hằng số m và n để:

$$\begin{cases} \frac{a}{1-a} \geq ma + n \\ \frac{b}{1-b} \geq mb + n \\ \frac{c}{1-c} \geq mc + n \end{cases}$$

Cộng theo vế $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq m(a+b+c) + 3n = m + 3n$

Như thế $m + 3n = \frac{3}{2} \Rightarrow n = -\frac{1}{3}m + \frac{1}{2}$, thay vào $\frac{a}{1-a} \geq ma + n$ ta được:

$\frac{a}{1-a} \geq ma - \frac{1}{3}m + \frac{1}{2} \Rightarrow (3a-1)\left[\frac{1}{2(1-a)} - \frac{m}{3}\right] \geq 0.$

Cho $a = \frac{1}{3}$ thì $\frac{1}{2(1-a)} = \frac{3}{4}$ từ đó ta dự đoán rằng $m = \frac{9}{4}$ để $\frac{1}{2(1-a)} - \frac{m}{3}$ khi phân tích cũng có chứa nhân tử $(3a-1)$.

Đây chính là cơ sở để ta tìm ra bất đẳng thức phụ $\frac{a}{1-a} \geq \frac{9}{4}a - \frac{1}{4}$.

Đối với học sinh lớp cao hơn:

Tương đối đơn giản, khi đã biết về đạo hàm HS có thể dùng phương pháp tiếp tuyến dựa trên nhận xét: *Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên K, khi đó tiếp tuyến tại $x_0 \in K$ (x_0 không phải hoành độ điểm uốn) có phương trình $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ thì trong một lân cận của x_0 ta luôn có: hoặc $f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ hoặc $f(x) \leq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.*

Cụ thể trong trường hợp này xét hàm số $y = \frac{x}{1-x}$ trên $(0; 1]$.

Khi đó tiếp tuyến tại điểm $(\frac{1}{3}; \frac{1}{2})$ có dạng $y = \frac{9}{4}(x - \frac{1}{3}) + \frac{1}{2} = \frac{9}{4}x - \frac{1}{4}$ và ta cũng thu được kết quả tương tự như trên.

Trở lại bài toán ban đầu, dự đoán việc sáng tác đề bài dựa trên bất đẳng thức hiển nhiên dạng $(ax - by)^2 + (cy - dz)^2 + (mz - nx)^2 \geq 0$ sẽ cho chúng ta định hướng để tìm các hệ số thực dương a, b, c, k sao cho: $xy \leq ax^2 + \frac{1}{4a}y^2$; $yz \leq by^2 + \frac{1}{4b}z^2$; $zx \leq cz^2 + \frac{1}{4c}x^2$ và thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} a + \frac{1}{4c} = k \\ b + \frac{1}{4a} = 2k \\ c + \frac{1}{4b} = 5k \\ abc = \frac{1}{8} \end{cases}$$

Điều kiện cuối cùng là để tồn tại dấu bằng xảy ra*(chú ý không được ép k = 1 vì rất có thể khi đó hệ phương trình vô nghiệm).*

Từ $abc = \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{1}{4a} = 2bc; \frac{1}{4b} = 2ca; \frac{1}{4c} = 2ab$ thay vào hệ trên:

$$\begin{cases} a + 2ab = k \\ b + 2bc = 2k \\ c + 2ca = 5k \\ abc = \frac{1}{8} \end{cases}$$

Từ $b + 2bc = 2k \Rightarrow 2a(b + 2bc) = 4ka \Rightarrow 2ab + 4abc = 4ka \Rightarrow k - a + \frac{1}{2} = 4ka$ $\Rightarrow a = \frac{2k+1}{2(4k+1)}$. Tương tự $b = \frac{4k+1}{2(10k+1)}$; $c = \frac{10k+1}{2(2k+1)}$.

Thay vào phương trình đầu tiên ta thu được: $\frac{2k+1}{2(4k+1)} + 2.\frac{2k+1}{2(4k+1)}.\frac{4k+1}{2(10k+1)} = k$

$\Leftrightarrow 40k^3 - 8k - 1 = 0 \Leftrightarrow (2k - 1)(20k^2 + 10k + 1) = 0$.

Vì $k > 0$ nên ta chọn $k = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{3}; b = \frac{1}{4}; c = \frac{3}{2}$, từ đó ta có:

$xy \le \frac{1}{3}x^2 + \frac{3}{4}y^2$; $yz \le \frac{1}{4}y^2 + z^2$; $zx \le \frac{3}{2}z^2 + \frac{1}{6}x^2$, cộng theo vế ta được:

$S = xy + yz + zx \le \frac{1}{3}x^2 + \frac{3}{4}y^2 + \frac{1}{4}y^2 + z^2 + \frac{3}{2}z^2 + \frac{1}{6}x^2 = \frac{1}{2}x^2 + y^2 + \frac{5}{2}z^2 = \frac{1}{2}(x^2 + 2y^2 + 5z^2) = \frac{1}{2}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $\begin{cases} x = \frac{3}{2}y \\ y = 2z \\ z = \frac{1}{3}x \\ x^2 + 2y^2 + 5z^2 = 1 \end{cases}$

Vì chỉ cần tìm một bộ x, y, z nên ta chọn$(x, y, z) = \left(\frac{3}{\sqrt{22}}; \frac{2}{\sqrt{22}}; \frac{1}{\sqrt{22}}\right)$.

Kết luận: GTLN của S là $\frac{1}{2}$.

Bài toán 2 (USAMO 2003)**:**
Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{(b+c+2a)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(c+a+2b)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(a+b+2c)^2}{2c^2+(a+b)^2} \le 8$$

Lời giải:

Bằng cách chuẩn hóa a + b + c = 1 ta đưa BĐT đã cho về dạng:

$$\frac{(1+a)^2}{2a^2+(1-a)^2}+\frac{(1+b)^2}{2b^2+(1-b)^2}+\frac{(1+c)^2}{2c^2+(1-c)^2} \le 8$$

Ta sẽ đi tìm các hằng số m và n để:

$$\begin{cases} \dfrac{(1+a)^2}{2a^2+(1-a)^2} \le ma+n \\ \dfrac{(1+b)^2}{2b^2+(1-b)^2} \le mb+n \\ \dfrac{(1+c)^2}{2c^2+(1-c)^2} \le mc+n \end{cases}$$

Làm tương tự như **Bài toán 1** ta thu được $m = 4$; $n = \frac{4}{3}$ nghĩa là ta có bất đẳng thức phụ: $\frac{(1+a)^2}{2a^2+(1-a)^2} \le 4a+\frac{4}{3}$ với $\forall\ a \in (0; 1]$ mà việc chứng minh không khó$\left[\Leftrightarrow -(3a-1)^2\frac{4a+1}{2a^2+(1-a)^2} \le 0\right]$, từ đó dễ dàng có được lời giải cho bài toán nêu trên.

Tất nhiên có những bài toán không thể áp dụng ngay được mà phải biến đổi, ví dụ:

Bài toán 3 *(sưu tầm):*
Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a^4 + b^4 + c^4 = 3$.
Chứng minh rằng: $\frac{1}{4-ab} + \frac{1}{4-bc} + \frac{1}{4-ca} \le 1$.

Đây là bài toán đối xứng quen thuộc và không thể làm khó được các bạn thành thạo sử dụng BĐT Schur nhưng cứ hãy thử với hệ số bất định, đó cũng là trải nghiệm không tồi chút nào!

Như vậy trong nhiều trường hợp, phương pháp hệ số bất định tỏ ra rất hữu hiệu, giúp cho học sinh dự đoán hướng đi cho các bài toán khó(**với nhiều dạng khác nhau: như phân tích đa thức thành nhân tử, bất đẳng thức, giải các phương trình, hệ phương trình, nguyên hàm – tích phân…**) hoặc chí ít cũng không bị lúng túng khi đọc các tài liệu(nhất là lời giải search trên mạng internet) có những bất đẳng thức phụ như kiểu trên trời rơi xuống…

Thay cho lời kết, xin tạm mượn lời của TS. Trần Đình Châu — NGƯT. TS. Đặng Thị Thu Thủy[đăng trong Tạp chí Giáo dục, Số 421 (Kì 1 — 1/2018), tr 33—35]

Đi sâu khai thác vẻ đẹp của toán học giúp HS thấy được cái hay, cái đẹp của toán học và sự gắn kết giữa toán học với thực tiễn. Qua đó, góp phần giáo dục toàn diện cho HS thông qua dạy và học môn Toán như: rèn luyện tính kiên trì, tỉ mỉ, tăng cường kĩ năng sử dụng công nghệ thông tin, khả năng hội họa, thẩm mỹ, phát triển tư duy giải quyết vấn đề và sáng tạo, tập dượt nghiên cứu khoa học... giúp các em thấy được sự thú vị trong toán học, yêu thích học tập môn Toán hơn ngay từ khi còn ngồi trên ghế nhà trường.

Đó là những mầm non, đội ngũ kế cận cho tương lai của nền khoa học nước nhà.

Hà Nội, ngày 03 tháng 04 năm 2023

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. X. V. Cônhiagin, G. A. Tônôian, I. F. Sarưghin: Các đề thi vô địch toán của các nước (Nguyễn Đễ, Nguyễn Khánh Nguyên dịch từ tiếng Nga), Nhà xuất bản Hải Phòng, 1993.

2. Đề thi HSG các cấp của các quận(huyện), tỉnh(thành phố) trên cả nước.

3. Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ.

4. Các chuyên đề SEMINAR Hội toán học Hà Nội.

5. Các website về Toán học trong nước và nước ngoài.