Một số chuyên đề

TOÁN NÂNG CAO DÀNH CHO HỌC SINH PHỔ THÔNG

www.toanhocvietnam.com

Tác giả: **Nguyễn Kim Sổ**

Hội Toán học Việt Nam

CÁC KÝ HIỆU TOÁN HỌC THÔNG DỤNG DÙNG TRONG TÀI LIỆU

1. **IMO** : Cuộc thi học sinh giỏi toán quốc tế.
2. **VMO** : Kỳ thi học sinh giỏi quốc gia Việt Nam.
3. **ĐHKHTN** : Đại học Khoa Học Tự Nhiên.
4. **ĐHSPHN** : Đại học Sư Phạm Hà Nội.
5. **N** : Tập số tự nhiên.
6. **N*** : Tập các số nguyên dương.
7. **Z** : Tập các số nguyên.
8. **Q** : Tập số hữu tỷ.
9. **R** : Tập số thực.
10. Ø : Tập rỗng.
11. **a ⋮ b** : a chia hết cho b.
12. **d|m** : d là ước số của m.
13. **ƯCLN(a; b)** : Ước số chung lớn nhất của 2 số a và b.
14. **BCNN(a; b)** : Bội số chung nhỏ nhất của 2 số a và b.
15. **(a; b) = 1** : Hai số a và b nguyên tố cùng nhau.
16. $\sum_{i=1}^{n} x_i$: Tổng $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ (tổng Sigma).
17. $\prod_{i=1}^{n} x_i$: Tích $x_1 . x_2 \ldots x_n$.
18. **n!** : Tích n số nguyên dương đầu tiên.
19. **[x]** : Phần nguyên của số thực x, là số nguyên không vượt quá x.
20. **{x}** : Phần lẻ của số thực x, {x} = x – [x].
21. **BĐT** : Bất đẳng thức.
22. **VT** : Vế trái.
23. **VP** : Vế phải.

Phương pháp ĐẶC BIỆT HÓA

trong chứng minh toán học...

Trong thực tế khi làm Toán chúng ta gặp nhiều bài tập số ẩn lớn, giá trị lớn, số bước thực hiện lớn...mà chưa thể tìm được cách giải ngay, chưa hình dung được dữ liệu thay đổi như thế nào khi thực hiện bước tiếp theo thì chúng ta sẽ đưa vài toán về các trường hợp nhỏ hơn, đặc biệt hơn để dễ dàng thực hiện thuật toán hay phân tích, đánh giá và từ đó dự đoán, tìm hướng đi – phương pháp giải cho bài toán ban đầu.

Ví dụ cần chứng minh một bất đẳng thức "lạ" với 3 biến a, b, c ta nên đưa bài toán về trường hợp đặc biệt bằng cách giảm số biến của bài toán xuống 2 biến a, b. Một bài toán về trò chơi với 37 tấm thẻ và 327 lượt chơi thì ta quy thử về 3 tấm, 5 tấm thẻ xem thế nào. Một bài toán so sánh với $(17091982!)^2$ ta thử xét n = 2; n = 3 xem điều gì sẽ xảy ra...đôi khi chân lý bắt đầu từ những điều đơn giản nhất!

Chúng ta cùng theo dõi các ví dụ sau:

Bài toán 1:
So sánh các số sau:
$(17091982!)^2$ và $17091982^{17091982}$

[Đề thi toán vô địch Hà Lan – năm 1982]

Lời giải:

Như đã nói ở trên, những bài tập dạng "số lớn" như thế này chúng ta thường dùng phương pháp "đặc biệt hóa". Học sinh dễ dàng kiểm tra các kết quả sau: $(2!)^2 = 2^2$; $(3!)^2 > 3^3$; $(4!)^2 > 4^4$... như thế phải chăng $(n!)^2 > n^n$.

Mặt khác khi phân tích $(4!)^2 = (1.2.3.4)^2 = (1.4)(2.3)(3.2)(4.1)$ và nhận thấy rằng $1.4 = 4$; $2.3 > 4$; $3.2 > 4$; $4.1 = 4$ nghĩa là $k(n - k + 1) \ge n$ với mọi $k = \overline{1, n}$. Với dự đoán này, ta sẽ chứng minh bổ đề nhỏ sau:

Bổ đề:

Cho số nguyên dương n, khi đó $k(n - k + 1) \ge n$ với mọi $k = \overline{1, n}$.

(Bổ đề là bổ đề là một giả thuyết đưa vào và phải được chứng minh tính đúng đắn, dùng làm nền tảng để từ đó giải quyết bài toán ban đầu).

Thật vậy, ta xét hiệu $k(n - k + 1) - n = k(n - k) + k - n = k(n - k) - (n - k) = (n - k)(k - 1)$.

Rõ ràng $n - k \ge 0$ và $k - 1 \ge 0 \Rightarrow (n - k)(k - 1) \ge 0$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $k = n$ hoặc $k = 1$. Bổ để được sáng tỏ.

Trở lại bài toán, ta thấy:

$(17091982!)^2 = (1.2.3....17091982)^2 =$
$(1.17091982)(2.17091981)...(17091982.1)$.

Theo kết quả bổ đề trên: $1.17091982 = 17091982$; $2.17091981 > 17091982$; $3.17091980 > 17091982$;...; $17091981.1 = 17091982$.

Suy ra: $(17091982!)^2 > 17091982^{17091982}$. Đây cũng chính là kết luận của chúng ta.

Lời bình:

Từ cách phân tích là lời giải cho bài toán trên ta có thể kết luận: $(n!)^2 \ge n^n$ với mọi $n \in N^*$. Một bất đẳng thức hay mà chúng ta còn gặp lại sau này.

Bài toán 2:
Trên mặt bàn có 37 tấm thẻ cùng kích thước. Mỗi tấm thẻ có 2 mặt, một mặt màu xanh và một mặt màu đỏ. Lúc đầu người ta xếp tất cả các tấm thẻ đều có mặt màu xanh ngửa lên. Ta thực hiện trò chơi như sau: Mỗi lượt phải đổi mặt 2 tấm thẻ khác nhau trong 37 tấm thẻ trên mặt bàn. Hỏi sau 327 lượt chơi như vậy có thể tất cả 37 tấm thẻ trên bàn đều có

mặt màu đỏ lên trên hay không? Tại sao?

[Đề thi Olympic lớp 7 quận Hoàng Mai – Hà Nội 2017 – 2018]

Lời giải:

Đây là bài toán suy luận logic khá hay sử dụng tính chẵn lẻ. Thật khó tưởng tượng nếu ta sử dụng đầy đủ 3 7 quân bài và tính xem sau mỗi bước thì số mặt xanh hay đỏ trên mặt bàn là bao nhiêu. Ta lại sử dụng phương pháp đặc biệt hóa, xem xét bài toán nhỏ hơn: với 2 tấm thẻ hoặc 4 tấm thì chỉ cần sau 1 hoặc 2 lượt chơi thì tất cả các mặt đỏ đã được lật, còn với 3 tấm thì sao?

Thực tế cho thấy rằng sau lượt chơi đầu tiên, trên bàn sẽ có 2 tấm thẻ màu đỏ và 1 tấm thẻ màu xanh, với cách chọn 2 quân tiếp theo bất kỳ thì số mặt xanh còn lại cũng sẽ là 1 hoặc 3(là một số lẻ) nghĩa là không bao giờ đạt được kết quả là lật được tất cả các tấm thẻ có màu đỏ hướng lên trên. Vậy là đã xuất hiện ý tưởng cho việc giải bài toán trên rồi đấy!

Dễ nhận thấy rằng số mặt xanh ban đầu bằng 37(là một số lẻ). Khi thực hiện lật 2 thẻ bất kỳ chỉ có thể xảy ra:

Trường hợp 1: Nếu lật 2 thẻ đang có mặt xanh, khi đó số mặt xanh trên bàn giảm đi 2 đơn vị.

Trường hợp 2: Nếu lật 2 thẻ mà có màu đối lập thì số mặt xanh không đổi.

Trường hợp 3: Nếu lật 2 thẻ đang có mặt đỏ thì số mặt xanh tăng lên 2

Nghĩa là ở bất kỳ trường hợp nào, số mặt xanh sau mỗi lượt chơi vẫn là một số lẻ. Nó không thể bằng 0! Nghĩa là với luật chơi như vậy thì không thể xảy ra trường hợp cả 37 tấm thẻ trên bàn đều có mặt màu đỏ hướng lên trên dù có thực hiện bao nhiêu lần đi nữa.

Lời bình:

Dữ liệu "327" lần trong đề ra chỉ gây rối, nhằm đánh lạc hướng suy nghĩ của người làm, trên thực tế cho thấy việc lật được tất cả các mặt cùng màu hay không chỉ phụ thuộc vào số thẻ(chẵn hay lẻ) chứ không phụ thuộc vào số lượt chơi.

Trong thi trắc nghiệm, đặc biệt hóa là cách tương đối hữu dụng giúp học sinh kiểm tra và lựa chọn kết quả một cách hợp lý và nhanh chóng.

Bài toán 3:
Thu gọn biểu thức $S = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ ta sẽ thu được các kết quả nào dưới đây:

A: $\frac{n-1}{2n-1}$ B: $\frac{n}{2n+1}$ C: $\frac{n^2}{2n-1}$ D: $\frac{n+1}{2n+1}$

Lời giải:

Đây là bài toán đơn giản với các bạn khá – giỏi nhưng với các bạn học chưa tốt hoặc chưa được học các phương pháp tính tổng cơ bản sẽ trở thành phức tạp và với thời gian hạn hẹp của đề thi trắc nghiệm cho mỗi câu hỏi sẽ làm cho các bạn mất nhiều thời gian.

Cách làm đơn giản là kiểm tra với n = 1. Khi đó $S = \frac{1}{3}$ và thử trực tiếp n = 1 vào các biểu thức A, B, C, D ta nhận thấy chỉ có B cho kết quả đúng $\frac{1}{3}$. Vậy các bạn chọn đáp án B cho câu trả lời.

Lời bình:

Đây là "mẹo" nhỏ trong quá trình làm bài thi, còn về lâu dài chúng ta phải học cẩn trọng, xử lý triệt để tận gốc rễ, hiểu kỹ các phương pháp giải toán chứ chúng tôi không khuyến khích học sinh, sinh viên kiểu mò mẫm như vậy!

Hà Nội, ngày 20 tháng 04 năm 2019

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. X. V. Cônhiagin, G. A. Tônôian, I. F. Sarưghin: Các đề thi vô địch toán của các nước (Nguyễn Đễ, Nguyễn Khánh Nguyên dịch từ tiếng Nga), Nhà xuất bản Hải Phòng, 1993.

2. Đề thi HSG các cấp của các quận(huyện), tỉnh(thành phố) trên cả nước.

3. Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ.

4. Các chuyên đề SEMINAR Hội toán học Hà Nội.

5. Các website về Toán học trong nước và nước ngoài.