Một số chuyên đề

TOÁN NÂNG CAO DÀNH CHO HỌC SINH PHỔ THÔNG

w w w . t o a n h o c v i e t n a m . c o m

Tác giả: **Nguyễn Kim Sổ**

Hội Toán học Việt Nam

CÁC KÝ HIỆU TOÁN HỌC THÔNG DỤNG DÙNG TRONG TÀI LIỆU

1. **IMO** : Cuộc thi học sinh giỏi toán quốc tế.
2. **VMO** : Kỳ thi học sinh giỏi quốc gia Việt Nam.
3. **ĐHKHTN** : Đại học Khoa Học Tự Nhiên.
4. **ĐHSPHN** : Đại học Sư Phạm Hà Nội.
5. **N** : Tập số tự nhiên.
6. **N*** : Tập các số nguyên dương.
7. **Z** : Tập các số nguyên.
8. **Q** : Tập số hữu tỷ.
9. **R** : Tập số thực.
10. ∅ : Tập rỗng.
11. **a ⋮ b** : a chia hết cho b.
12. **d|m** : d là ước số của m.
13. **ƯCLN(a; b)** : Ước số chung lớn nhất của 2 số a và b.
14. **BCNN(a; b)** : Bội số chung nhỏ nhất của 2 số a và b.
15. **(a; b) = 1** : Hai số a và b nguyên tố cùng nhau.
16. $\sum_{i=1}^{n} x_i$: Tổng $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ (tổng Sigma).
17. $\prod_{i=1}^{n} x_i$: Tích $x_1 . x_2 \ldots x_n$.
18. **n!** : Tích n số nguyên dương đầu tiên.
19. **[x]** : Phần nguyên của số thực x, là số nguyên không vượt quá x.
20. **{x}** : Phần lẻ của số thực x, {x} = x – [x].
21. **BĐT** : Bất đẳng thức.
22. **VT** : Vế trái.
23. **VP** : Vế phải.

Phương pháp

Chứng minh phản chứng trong toán học...

Đây là một phương pháp giải toán rất hay trong toán học nói chung và số học nói riêng, giúp học sinh giải quyết được nhiều bài toán, làm cho chúng trở nên đơn giản với lời giải dễ hiểu. Tuy nhiên cũng cần có sự sáng tạo, linh hoạt trong việc vận dụng các kiến thức cơ bản đã có với từng bài tập cụ thể, nhất là kinh nghiệm qua quá trình học tập, rèn luyện nghiêm túc.

Phương pháp này được tiến hành theo 3 bước sau:

Bước 1. *Phủ định kết luận (giả sử điều cần chứng minh là sai)*

Bước 2. *Từ điều giả sử này, bằng các biến đổi, lý luận suy ra một số tính chất hoặc quan hệ mới mâu thuẫn với giả thiết đã cho hoặc tính chất đúng đã biết của toán học.*

Bước 3. *Khẳng định tính đúng đắn của bài toán!*

Chúng ta cùng xem ví dụ sau:

Bài toán 1:
Giả sử $a_1, a_2,\ldots, a_7$ là các số nguyên và $b_1, b_2, \ldots, b_7$ cũng là các số nguyên đó nhưng viết theo một thứ tự khác.
Chứng minh rằng $(a_1 - b_1).(a_2 - b_2)\ldots(a_7 - b_7)$ là một số chẵn.

[Đề thi vô địch Anh – năm 1968]

Lời giải:

Giả sử $(a_1 - b_1).(a_2 - b_2)\ldots(a_7 - b_7)$ là một số lẻ, khi đó tất cả $a_1 - b_1$, $a_2 - b_2$, ..., $a_7 - b_7$ đều là các số lẻ và vì 7 là số lẻ ⇒ tổng của chúng cũng phải là số lẻ. Trong khi đó thực tế: $a_1 - b_1 + a_2 - b_2 + \ldots + a_7 - b_7 = (a_1 + a_2 + \ldots + a_7) - (b_1 + b_2 + \ldots + b_7) = 0$ là một số chẵn, mâu thuẫn!

Vậy điều giả sử là sai, nghĩa là $(a_1 - b_1).(a_2 - b_2)\dots(a_7 - b_7)$ là một số chẵn. Bài toán được chứng minh.

Lời bình:

Chúng ta có thể mở rộng bài toán như sau: Cho n là số nguyên dương lẻ, giả sử $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số nguyên và $b_1, b_2, \dots, b_n$ cũng là các số nguyên đó nhưng viết theo một thứ tự khác. Chứng minh rằng $(a_1 - b_1).(a_2 - b_2)\dots(a_n - b_n)$ là một số chẵn.

Việc tổng quát hay khái quát bài toán giúp học sinh nâng cao khả năng tư duy, sáng tạo, làm được một lớp các dạng toán tương tự. Hơn thế nữa trong quá trình giải các bạn còn tìm được thêm nhiều kết quả, công thức, cách biến đổi để áp dụng vào các bài toán sau này.

Bài toán 2:
Cho 6 số nguyên dương khác nhau nhỏ hơn 108. Chứng minh rằng: có thể chọn được ba trong 6 số đó chẳng hạn a, b, c sao cho $a < b.c$; $b < c.a$ và $c < a.b$.

Lời giải:

Giả sử phản chứng nghĩa là không tồn tại 3 số a, b, c nào trong 6 số thỏa mãn $a < b.c$; $b < c.a$ và $c < a.b$.

Khi đó, ký hiệu 6 số đã cho là $a_1, a_2, \dots, a_6$. Theo bài ra $1 \le a_1 < a_2 < \dots < a_6 < 108$ suy ra:

Vì $a_2 > a_1 \Rightarrow a_2 \ge 2$; $a_3 > a_2 \Rightarrow a_3 \ge 3$.

Ta đã có $a_2 < a_3a_4$ và $a_3 < a_2a_4 \Rightarrow a_4 \ge a_2a_3 \ge 6$, tương tự $a_5 \ge a_3a_4 \ge 3.6 = 18$ và $a_6 \ge a_4a_5 \ge 6.18 = 108$. Mâu thuẫn giả thiết là các số đã cho đều không vượt quá 108!

Vậy giả sử phản chứng là sai và bài toán được chứng minh.

Bài toán 3:
Từ những chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ta lập thành các số có 7 chữ số khác nhau. Chứng minh rằng trong các số tạo thành không có bất kì số nào chia hết cho những số còn lại.

Lời giải:

Giả sử có 2 số A và B mà $A \vdots B$. Khi đó tồn tại số tự nhiên $k > 1$ sao mà $A = k.B \Rightarrow k = A : B < 7654321 : 1234567$, vì $k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow k \le 6$.

Mặt khác A và B có cùng tổng các chữ số là 28 ⇒ A và B khi chia 9 cùng dư 1. Đặt $A = 9a + 1$; $B = 9b + 1$.

Khi đó $9a + 1 = k(9b + 1) \Rightarrow 9a - 9kb = k - 1 \Rightarrow k - 1 \vdots 9$. Nhưng trong các số tự nhiên k từ $2 \to 6$ không có số nào thỏa mãn $(k - 1) \vdots 9$. Mâu thuẫn!

Vậy điều giả sử trên là sai và bài toán được chứng minh.

Bài toán 4:
Xét 20 số $1 \le a_1 < a_2 < \ldots < a_{20} \le 70$ nguyên dương. Chứng minh rằng trong các hiệu $a_k - a_j$ $(1 \le j < k \le 20)$ có ít nhất 4 số bằng nhau.

[Đề kiểm tra kiến thức Toán lớp 9 – Đợt 1 – chuyên ĐHKHTN 2023]

Lời giải:

Bài toán này có nét rất giống với bài toán số 3 ở trên, quan trọng là chúng ta biết tạo ra bộ số liệu phù hợp để phục vụ cho việc chứng minh mà thôi. Cụ thể như sau:

Ta xét 19 số nguyên dương $a_{20} - a_{19}$, $a_{19} - a_{18}$, $a_{18} - a_{17}$,..., , $a_2 - a_1$ và giả sử phản chứng rằng không có 4 số nào bằng nhau. Ta ký hiệu và sắp xếp lại các số đó dưới dạng: $b_1 \le b_2 \le b_3 \le \ldots \le b_{19}$.

Suy ra $1 \le b_1 \le b_2 \le b_3 \Rightarrow 2 \le b_4 \le b_5 \le b_6$(vì ví dụ $b_4 = 1$ thì $b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = 1$), tương tự $\Rightarrow 3 \le b_7 \le b_8 \le b_9 \Rightarrow 4 \le b_{10} \le b_{11} \le b_{12} \Rightarrow 5 \le b_{13} \le b_{14} \le b_{15} \Rightarrow 6 \le b_{16} \le b_{17} \le b_{18} \Rightarrow 7 \le b_{19}$.

Khi đó $b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_{19} = (b_1 + b_2 + b_3) + (b_4 + b_5 + b_6) + \ldots + (b_{16} + b_{17} + b_{18}) + b_{19} \ge 3(1 + 2 + \ldots + 6) + 7 = 70$. Trong khi đó $b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_{19} = a_{20} - a_1 \le 70 - 1 = 69$. Mâu thuẫn!

Vậy điều giả sử là sai, đồng nghĩa với bài toán được chứng minh.

Phương pháp phản chứng đôi khi cũng được dùng trong chứng minh bất đẳng thức. Tuy nhiên tương đối ít, hiếm gặp, thường là “khó” và sau đây là một ví dụ điển hình:

Bài toán 5:
Với a, b, c là các số thực thỏa mãn đồng thời $a \ge 2$; $b \ge 4$; $c \ge 5$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 56$.
Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = a + b + c$.

[Đề thi chọn học sinh giỏi lớp 9]

Lời giải:

Dựa vào định dạng bài toán, ta sử dụng phương pháp đổi biến để quy về cùng điều kiện. Cụ thể đặt $a = x + 2$; $b = y + 4$ và $c = z + 5$, khi đó $x, y, z \ge 0$.

Từ giả thiết $a^2 + b^2 + c^2 = 56 \Rightarrow (x + 2)^2 + (y + 4)^2 + (z + 5)^2 = 56$

Suy ra $x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 8y + 10z = 11$

Đến đây ta sẽ chứng minh $x + y + z \ge 1$. Thậy vậy, giả sử ngược lại $x + y + z < 1 \Rightarrow x, y, z \in [0;1) \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \le x + y + z \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 8y + 10z = x^2 + y^2 + z^2 + 4(x + y + z) + 4(y + z) + 2z \le x + y + z + 4(x + y + z) + 4(y + z) + 2z < 1 + 4 + 4 + 2 = 11$ mâu thuẫn!

Nghĩa là $x + y + z \ge 1$. Khi đó $S = a + b + c = x + y + z + 11 \ge 12$.

Mặt khác, chẳng hạn với a = 2; b = 4; c = 6 thì thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 56$ và S = a + b + c = 12. Vậy kết luận GTNN của S là 12.

Với các bài toán yêu cầu chứng minh không tồn tại, chứng minh vô nghiệm… người ta cũng thường dùng chứng minh phản chứng.

Bài toán 6:
Chứng minh rằng phương trình sau $x^3 + 3y^3 = 9z^3$ không có nghiệm nguyên dương.

Lời giải:

Giả sử phản chứng nghĩa là phương trình $x^3 + 3y^3 = 9z^3$ có nghiệm nguyên dương. Theo nguyên lý cực hạn thì trong tập các nghiệm đó sẽ tồn tại bộ 3 số nguyên dương x_0, y_0, z_0 sao cho $x_0 + y_0 + z_0$ bé nhất.

Từ $x_0^3 + 3y_0^3 = 9z_0^3 \Rightarrow 3 \mid x_0^3 \Rightarrow x_0 \,\vdots\, 3$, đặt $x_0 = 3x_1$

Thay vào phương trình đã cho ta được: $27x_1^3 + 3y_0^3 = 9z_0^3 \Rightarrow 9x_1^3 + y_0^3 = 3z_0^3$ $\Rightarrow y_0 \,\vdots\, 3$, đặt $y_0 = 3y_1 \Rightarrow 9x_1^3 + 27y_1^3 = 3z_0^3 \Rightarrow 3x_1^3 + 9y_1^3 = z_0^3 \Rightarrow z_0 \,\vdots\, 3$, đặt $z_0 = 3z_1 \Rightarrow 3x_1^3 + 9y_1^3 = 27z_1^3$, suy ra $\Rightarrow x_1^3 + 3y_1^3 = 3z_1^3$ nghĩa là nếu (x_0, y_0, z_0) là nghiệm của phương trình đã cho thì (x_1, y_1, z_1) được xác định như trên cũng là nghiệm và dễ thấy rằng $x_1 + y_1 + z_1 = \frac{1}{3}(x_0 + y_0 + z_0) < x_0 + y_0 + z_0$, mâu thuẫn với tổng $x_0 + y_0 + z_0$ là bé nhất.

Vậy giả sử phản chứng là sai, bài toán được chứng minh. Cách giải như trên trong một số tài liệu gọi là phương pháp xuống thang(hoặc lùi vô hạn) và chúng ta sẽ nghiên cứu kỹ hơn trong phần PHƯƠNG TRÌNH NGHIỆM NGUYÊN…*(còn tiếp)*

Lớp chuyên Toán thầy Sổ

Liên hệ: 093.464.1088

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. X. V. Cônhiagin, G. A. Tônôian, I. F. Sarưghin: Các đề thi vô địch toán của các nước (Nguyễn Đễ, Nguyễn Khánh Nguyên dịch từ tiếng Nga), Nhà xuất bản Hải Phòng, 1993.

2. Đề thi HSG các cấp của các quận(huyện), tỉnh(thành phố) trên cả nước.

3. Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ.

4. Các chuyên đề SEMINAR Hội toán học Hà Nội.

5. Các website về Toán học trong nước và nước ngoài.