Một số chuyên đề

TOÁN NÂNG CAO DÀNH CHO HỌC SINH PHỔ THÔNG

w w w . t o a n h o c v i e t n a m . c o m

Tác giả: **Nguyễn Kim Số**

Hội Toán học Việt Nam

CÁC KÝ HIỆU TOÁN HỌC THÔNG DỤNG DÙNG TRONG TÀI LIỆU

1. **IMO** : Cuộc thi học sinh giỏi toán quốc tế.
2. **VMO** : Kỳ thi học sinh giỏi quốc gia Việt Nam.
3. **ĐHKHTN** : Đại học Khoa Học Tự Nhiên.
4. **ĐHSPHN** : Đại học Sư Phạm Hà Nội.
5. **N** : Tập số tự nhiên.
6. **N***: Tập các số nguyên dương.
7. **Z** : Tập các số nguyên.
8. **Q** : Tập số hữu tỷ.
9. **R** : Tập số thực.
10. Ø : Tập rỗng.
11. **a ⋮ b** : a chia hết cho b.
12. **d|m** : d là ước số của m.
13. **ƯCLN(a; b)** : Ước số chung lớn nhất của 2 số a và b.
14. **BCNN(a; b)** : Bội số chung nhỏ nhất của 2 số a và b.
15. **(a; b) = 1** : Hai số a và b nguyên tố cùng nhau.
16. $\sum_{i=1}^{n} x_i$: Tổng $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ (tổng Sigma).
17. $\prod_{i=1}^{n} x_i$: Tích $x_1 . x_2 \ldots x_n$.
18. **n!** : Tích n số nguyên dương đầu tiên.
19. **[x]** : Phần nguyên của số thực x, là số nguyên không vượt quá x.
20. **{x}** : Phần lẻ của số thực x, {x} = x – [x].
21. **BĐT** : Bất đẳng thức.
22. **VT** : Vế trái.
23. **VP** : Vế phải.

một số phương pháp tính tổng

Dành cho học sinh giỏi lớp 6 -7…

Để làm được phần này học sinh cần nắm vững các kiến thức cơ bản, quy tắc về dấu, nhân chia lũy thừa, quy đồng mẫu số, quy đồng tử số(ít gặp)…Trong các kỳ thi học sinh giỏi các khối 6 – 7, kỳ thi phân loại đánh giá chất lượng dạy và học… thì đây là bài không thể thiếu.

Ngoài việc tính giá trị biểu thức có thể còn kết hợp với 1 số ý khác như chứng minh bất đẳng thức, so sánh giá trị, tìm điều kiện để biểu thức nguyên, tìm x…Trước hết ta làm quen với một vài bài toán cơ bản sau:

Bài toán 1:
Cho số thực a khác 1 và n là số nguyên dương bất kỳ. Tính các tổng sau:
1. $S = 1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^n$
2. $M = 1 - a + a^2 - a^3 + \ldots - a^n$ (với n lẻ)
3. $N = 1 - a + a^2 - a^3 + \ldots + a^n$ (với n chẵn)
4. $P = a + 2a^2 + 3a^3 + \ldots + na^n$

Lời giải:

1. Phần a khá đơn giản, khi gặp các bài toán dạng này ta chỉ cần nhân 2 vế của biểu thức cần tính với cơ số chính rồi sau đó cộng(với tổng đan dấu) hoặc trừ(với tổng thuần dấu), cụ thể:

Từ $S = 1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^n$

Nhân cả 2 vế với a ta thu được: $aS = a(1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^n) = a + a^2 + \ldots + a^n + a^{n+1}$

Trừ theo vế ta được: $aS - S = (a + a^2 + \ldots + a^n + a^{n+1}) - (1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^n) = a^{n+1} - 1 \Rightarrow (a - 1)S = a^{n+1} - 1 \Rightarrow S = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$.

2. Từ $M = 1 - a + a^2 - a^3 + \ldots - a^n$ suy ra $aM = a - a^2 + a^3 - a^4 + \ldots + a^n - a^{n+1}$

Cộng theo vế $M + aM = 1 - a^{n+1} \Rightarrow (a + 1)M = 1 - a^{n+1} \Rightarrow M = \frac{1 - a^{n+1}}{a+1}$.

3. Làm tương tự phần b ta có kết quả: $N = \frac{1 + a^{n+1}}{a+1}$.

4. Thoạt nhìn biểu thức có vẻ phức tạp, đặc biệt khi a là số hữu tỉ cụ thể như $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$...tuy nhiên chúng ta vẫn thực hiện bằng việc nhân với cơ số thông thường:

$P = a + 2a^2 + 3a^3 + \ldots + na^n \Rightarrow aP = a^2 + 2a^3 + \ldots + (n - 1)a^n + na^{n+1}$

Trừ theo vế: $aP - P = [a^2 + 2a^3 + \ldots + (n - 1)a^n + na^{n+1}$

$] - (a + 2a^2 + 3a^3 + \ldots + na^n) = na^{n+1} - (a + a^2 + a^3 + \ldots + a^n) = na^{n+1} - a(1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^{n-1}) \Rightarrow (a - 1)P = na^{n+1} - \frac{a^n - 1}{a - 1} = \frac{na^{n+2} - na^{n+1} - a^n + 1}{a - 1}$, suy ra

$P = \frac{na^{n+2} - na^{n+1} - a^n + 1}{(a-1)^2}$.

Đây là những tổng lũy thừa rất hữu ích cho các bạn học sinh khi làm bài tập nâng cao hoặc trong các kỳ thi học sinh giỏi khối 6–7.

Bài toán 2:
Tính các tổng sau:
1. $S = 9 + 99 + 999 + \ldots + \underbrace{999\ldots999}_{2023 \text{ chữ số } 9}$
2. $P = 1 + 11 + 111 + \ldots + \underbrace{111\ldots111}_{2023 \text{ chữ số } 1}$
3. $Q = 2 + 22 + 222 + \ldots + \underbrace{222\ldots222}_{2023 \text{ chữ số } 2}$

Lời giải:

1. Để ý rằng $9 = 10 - 1$; $99 = 100 - 1 = 10^2 - 1$;...; $\underbrace{999\ldots999}_{2023 \text{ chữ số } 9} = 10^{2023} - 1$

Do đó $S = 10 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^{2023} - 2023 = 10(1+10 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^{2022}) - 2023 = 10.\ \frac{10^{2023}-1}{9} - 2023$.

2. Ta thấy $P = 1 + 11 + \dots + \underbrace{111\dots111}_{2023\ chữ\ số\ 1} \Rightarrow 9P = 9 + 99 + \dots + \underbrace{999\dots999}_{2023\ chữ\ số\ 9}$.

Sử dụng kết quả phần trước ta có ngay $9P = S = 10\,\frac{10^{2023}-1}{9} - 2023$ suy ra:

$P = \frac{1}{9}\left(10\,\frac{10^{2023}-1}{9} - 2023\right)$.

3. $Q = 2 + 22 + 222 + \dots + \underbrace{222\dots222}_{2023\ chữ\ số\ 2} = 2\left(1 + 11 + 111 + \dots + \underbrace{111\dots111}_{2023\ chữ\ số\ 1}\right)$.

Sử dụng kết quả phần 2 ta được: $Q = 2P = \frac{2}{9}\left(10\,\frac{10^{2023}-1}{9} - 2023\right)$.

Bài toán 3:

1. Tính tổng sau $S = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{2022.2023}$

2. Chứng minh rằng $P = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2023^2} < 1$

[Đề thi chọn đội tuyển học sinh giỏi Toán lớp 6]

Lời giải:

1. Đối với các dạng toán có "hiệu các nhân tử ở mẫu số" không đổi, chúng ta thường phân tích và sử sụng phương pháp "khử liên tiếp" như sau:

Nhận xét rằng:

$\frac{1}{1.2} = \frac{2-1}{1.2} = 1 - \frac{1}{2}$; $\frac{1}{2.3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$; $\frac{1}{3.4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$; …; $\frac{1}{2022.2023} = \frac{1}{2022} - \frac{1}{2023}$

Từ đó $S = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{2022.2023} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2022} - \frac{1}{2023} = 1 + (-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) + (-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}) + \dots + (-\frac{1}{2022} + \frac{1}{2022}) - \frac{1}{2023} \Rightarrow S = 1 - \frac{1}{2023}$.

Với cách làm tương tự, chúng ta có thể tổng quát hóa bài toán dưới dạng tính tổng P = $\frac{1}{1.2.3\ldots k}+\frac{1}{2.3\ldots(k+1)}+\ldots+\frac{1}{(n-k+1)\,(n-k+2)\ldots n}$ bằng cách nhân cả 2 vế của P với (k − 1):

$(k-1)P=\frac{k-1}{1.2.3..k}+\frac{(k+1)-2}{2.3\ldots(k+1)}+\ldots+\frac{n-(n-k+1)}{(n-k+1)(n-k+2)\ldots n}=\frac{1}{1.2.3\ldots(k-1)}-\frac{1}{2.3\ldots k}$ $+\frac{1}{2.3\ldots k}-\frac{1}{3.4\ldots(k+1)}+\ldots+\frac{1}{(n-k+1)(n-k+2)\ldots(n-1)}-\frac{1}{(n-k+2)(n-k+2)\ldots n}=$ $\frac{1}{1.2.3\ldots(k-1)}-\frac{1}{(n-k+2)(n-k+2)\ldots n}$.

Suy ra P = $\left[\frac{1}{1.2.3\ldots(k-1)}-\frac{1}{(n-k+2)(n-k+2)\ldots n}\right]:(k-1)$.

2. Để giải được bài toán này chúng ta sử dụng phương pháp "làm trội" bằng việc đánh giá mẫu số: $2^2 > 1.2$; $3^2 > 2.3$; …; $2023^2 > 2022.2023$.

Do đó P = $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{2023^2}<\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots+\frac{1}{2022.2023}$

Theo phần a. thì $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots+\frac{1}{2022.2023}=1-\frac{1}{2023}$ suy ra $P<1-\frac{1}{2023}\Rightarrow$ $P < 1$. Bài toán được chứng minh.

Lời bình:

Chúng ta hãy bắt đầu từ những điều đơn giản, khi tìm hiểu một bài toán thật cặn kẽ cũng như tìm nhiều cách giải, tiếp cận bài toán từ nhiều hướng để có thể nhớ lâu. Bài toán đơn giản nhưng đôi khi bạn sẽ gặp lại chúng ở những lớp cao hơn, ví dụ một bài toán về dãy số trong kỳ thi HSG lớp 11 – Tỉnh Vĩnh Phúc(hệ không chuyên) năm 2011–2012:

Cho dãy số $\{u_n\}$ được xác định bởi $u_1 = \sin 1$; $u_n = u_{n-1}+\frac{\sin n}{n^2}$, với mọi $n \in N$ và $n \geq 2$. Chứng minh rằng dãy số $\{u_n\}$ được xác định như trên là một dãy số bị chặn.

Đây là bài toán tưởng chừng như phức tạp nhưng nếu để ý một chút và áp dụng phương pháp làm trội như trên thì thật đơn giản chỉ ra $-2 < u_n < 2$. Chúng ta sẽ gặp lại trong chương dãy số ở quyển sau.

Bài toán 4:
Cho p, q là các số nguyên dương thỏa mãn:
$\frac{p}{q} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319}$.
Chứng minh rằng p chia hết cho 1979.

[Đề thi IMO lần thứ 21 tại England – năm 1979]

Lời giải:

Đặt $A = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319} = (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319}) - 2(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{1318}) = (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319}) - (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{659}) = \frac{1}{660} + \frac{1}{661} + \dots + \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319} = (\frac{1}{660} + \frac{1}{1319}) + (\frac{1}{661} + \frac{1}{1318}) + \dots + (\frac{1}{989} + \frac{1}{990})$
$= \frac{1979}{660.1319} + \frac{1979}{661.1318} + \dots + \frac{1979}{989.990} = \frac{1979.M}{660.661....1318.1319}$

Vì 1979 là số nguyên tố và 1979 > 1319 nên nó nguyên tố cùng nhau với tất cả các số 660; 661; ...; 1319. Nghĩa là sau khi rút gọn ta chỉ có thể đưa về phân số tối giản dạng $A = \frac{1979.m}{n}$ trong đó (m; n) = 1 và (n; 1979) = 1. Suy ra $\frac{p.n}{1979} = qm \in N \Rightarrow p \vdots 1979$. Bài toán được chứng minh.

Đôi điều chia sẻ:

IMO 1979 là kì thi Olympic Toán học quốc tế lần thứ 21, diễn ra ở London, Anh quốc. Lê Bá Khánh Trình là thí sinh duy nhất của Việt Nam(cho đến nay) giành giải đặc biệt trong một kì thi Olympic Toán học quốc tế IMO. Ông cũng được mệnh danh là "cậu bé vàng của toán học Việt Nam".

Bài toán 5:
a. Cho 2 biểu thức $A = \frac{1}{1.101} + \frac{1}{2.102} + \dots + \frac{1}{10.110}$ và $B = \frac{1}{1.11} + \frac{1}{2.12} + \dots + \frac{1}{100.110}$. Tính $\frac{A}{B}$.
b. Cho biểu thức $S = \frac{x+4}{x^2+1}$. Tìm các số nguyên x để A nhận giá trị là số

nguyên.

[Đề thi Olympic lớp7 quận Hoàng Mai – Hà Nội 2018 – 2019]

Lời giải:

a. Nhìn biểu thức B phức tạp và nhiều số hạng hơn, để ý rằng $11 - 1 = 10$; $12 - 2 = 10$;… nên ta sẽ biến đổi nó(kinh nghiệm là xử lý để đưa dạng phức tạp về đơn giản sẽ dễ hơn làm ngược lại) bằng cách nhân cả 2 vế của B với 10 và biến đổi như sau:

$10B = 10\left(\frac{1}{1.11} + \frac{1}{2.12} + \dots + \frac{1}{100.110}\right) = \frac{10}{1.11} + \frac{10}{2.12} + \dots + \frac{10}{100.110} = 1 - \frac{1}{11} + \frac{1}{2} - \frac{1}{12} + \frac{1}{3} - \frac{1}{13} + \dots + \frac{1}{100} - \frac{1}{110}$

$= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{100}\right) - \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{110}\right) = \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{10} + \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{100}\right)\right] - \left[\left(\frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{100}\right) + \frac{1}{101} + \dots + \frac{1}{110}\right] = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{10}\right) - \left(\frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{110}\right) = \left(1 - \frac{1}{101}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{102}\right) + \dots + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{110}\right) = \frac{100}{1.101} + \frac{100}{2.102} + \dots + \frac{100}{10.110} = 100\left(\frac{1}{1.101} + \frac{1}{2.102} + \dots + \frac{1}{10.110}\right) = 100\text{ A}.$

Suy ra $\frac{A}{B} = \frac{1}{10}$.

b. Để chặt chẽ ta làm như sau:

Điều kiện cần:

Giả sử $S = \frac{x+4}{x^2+1} \in Z \Rightarrow \frac{x(x+4)}{x^2+1} \in Z$ hay $\frac{x^2+4x}{x^2+1} = \frac{x^2+1+4x-1}{x^2+1} = 1 - \frac{4x-1}{x^2+1} \in Z$ suy ra $\frac{4x-1}{x^2+1} \in Z$.

Mặt khác cũng từ $\frac{x+4}{x^2+1} \in Z \Rightarrow \frac{4(x+4)}{x^2+1} \in Z \Rightarrow \frac{4x+16}{x^2+1} \in Z$.

Từ đó: $\frac{4x+16}{x^2+1} - \frac{4x-1}{x^2+1} = \frac{17}{x^2+1} \in Z \Rightarrow 17 \vdots (x^2+1)$. Vì $x^2+1 > 0$ nên ta xét các trường hợp:

– Trường hợp 1: $x^2 + 1 = 1 \Rightarrow x = 0$.

– Trường hợp 1: $x^2 + 1 = 17 \Rightarrow x = \pm 4$.

Điều kiện đủ:

Thử trực tiếp các giá trị đã tìm được ta thấy $x \in \{-4; 0)$ thỏa mãn yêu cầu bài ra.

Lời bình:

Học sinh chú ý khi làm các bài tập liên quan đến giá trị nguyên của biểu thức, nếu trong quá trình biến đổi có nhân với nhân tử nào đó để thuận lợi cho việc tính toán, suy diễn thì sau khi tìm được giá trị x,y,m,n…ta phải tiến hành thử lại(điều kiện đủ) rồi mới kết luận.

Bởi vì n.A ∈ Z nhưng chưa chắc A ∈ Z. Ví dụ 4. $\frac{1}{2} = 2 \in Z$ *nhưng* $\frac{1}{2} \notin Z$*!*

Bài toán 6:
Cho A là tổng các phân số viết theo quy luật:
$A = \frac{2009}{2} + \frac{2008}{2^2} + \frac{2007}{2^3} + \ldots + \frac{3}{2^{2007}} + \frac{2}{2^{2008}} + \frac{1}{2^{2009}}$
Hãy chứng tỏ rằng: $2008 < A < 2009$.

[Đề thi Olympic lớp 6 quận Hoàng Mai – Hà Nội 2008 – 2009]

Lời giải:

Ta thấy $A = \frac{2009}{2} + \frac{2008}{2^2} + \frac{2007}{2^3} + \ldots + \frac{3}{2^{2007}} + \frac{2}{2^{2008}} + \frac{1}{2^{2009}}$

Suy ra $2A = 2009 + \frac{2008}{2} + \frac{2007}{2^2} + \ldots + \frac{3}{2^{2006}} + \frac{2}{2^{2007}} + \frac{1}{2^{2008}}$

Trừ theo vế ta được: $2A - A = (2009 + \frac{2008}{2} + \frac{2007}{2^2} + \ldots + \frac{3}{2^{2006}} + \frac{2}{2^{2007}} + \frac{1}{2^{2008}}) - (\frac{2009}{2} + \frac{2008}{2^2} + \frac{2007}{2^3} + \ldots + \frac{3}{2^{2007}} + \frac{2}{2^{2008}} + \frac{1}{2^{2009}}) = 2009 - (\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^{2007}} + \frac{1}{2^{2008}} + \frac{1}{2^{2009}})$.

Dễ nhận thấy $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{2007}}+\frac{1}{2^{2008}}+\frac{1}{2^{2009}}>0 \Rightarrow A<2009$.

Ta sẽ chứng minh B = $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{2007}}+\frac{1}{2^{2008}}+\frac{1}{2^{2009}}<1$

Thật vậy, 2B = 1 + = $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{2007}}+\frac{1}{2^{2008}} \Rightarrow 2B-B=1-\frac{1}{2^{2009}} \Rightarrow B=1-\frac{1}{2^{2009}}<1 \Rightarrow A>2008$.

Đến đây bài toán được chứng minh.

Bài toán 7:

a. So sánh các số sau: $\frac{10^{2020}+1}{10^{2021}+1}$ và $\frac{10^{2021}+1}{10^{2022}+1}$

b. So sánh P và Q biết: $P=\frac{2020}{2021}+\frac{2021}{2022}+\frac{2022}{2023}$ và $Q=\frac{2020+2021+2022}{2021+2022+2023}$

c. Cho biểu thức $S=\frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}\ldots\frac{447}{448}.\frac{449}{450}$. So sánh A và $\frac{1}{30}$

[Đề thi chọn đội tuyển học sinh giỏi Toán lớp 6]

Lời giải:

Với các dạng bài tập thế này chúng ta không thể sử dụng phương pháp quy đồng phân số. Thường sẽ dùng cách làm trội hoặc sử dụng bất đẳng thức phân số…

a. Dễ dàng nhận thấy $\frac{10^{2021}+1}{10^{2022}+1}<1$, sử dụng bất đẳng thức phân số ta được:

$$\frac{10^{2021}+1}{10^{2022}+1}<\frac{10^{2021}+1+9}{10^{2022}+1+9}=\frac{10^{2021}+10}{10^{2022}+10}=\frac{10(10^{2020}+1)}{10(10^{2021}+1)}$$

b. Ta đánh giá như sau: $\frac{2020}{2021}>\frac{2020}{2021+2022+2023}$; $\frac{2021}{2022}>\frac{2021}{2021+2022+2023}$ và $\frac{2022}{2023}>\frac{2022}{2021+2022+2023}$ suy ra $\frac{2020}{2021}+\frac{2021}{2022}+\frac{2022}{2023}>\frac{2020}{2021+2022+2023}+\frac{2021}{2021+2022+2023}+\frac{2022}{2021+2022+2023}=\frac{2020+2021+2022}{2021+2022+2023}$ hay P > Q.

c. Ta viết lại biểu thức như sau $S=\frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}\ldots\frac{447}{448}.\frac{449}{450}=\frac{3}{2}.\frac{5}{4}.\frac{7}{6}\ldots\frac{449}{448}.\frac{1}{450}$

Sử dụng bất đẳng thức phân số: $\frac{3}{2} > \frac{3+1}{2+1} = \frac{4}{3}$; $\frac{5}{4} > \frac{6}{5}$; …; $\frac{449}{448} > \frac{450}{449}$

suy ra S > $\frac{4}{3}.\frac{6}{5}....\frac{450}{449}.\frac{1}{450}$

⇒ $S^2 > S.\left(\frac{4}{3}.\frac{6}{5}....\frac{450}{449}.\frac{1}{450}\right) = \left(\frac{3}{2}.\frac{5}{4}.\frac{7}{6}...\frac{449}{448}.\frac{1}{450}\right).\left(\frac{4}{3}.\frac{6}{5}....\frac{450}{449}.\frac{1}{450}\right) = \frac{1}{900}$

⇒ S > $\frac{1}{30}$. Bài toán được chứng minh.

Bài toán 8:

Hãy tính giá trị các biểu thức sau:

a. $S = \left(\frac{2022^{2021}}{2020 + 2021^{2020}} - \frac{2021}{2020} + 1\right).\left[\left(\frac{151515}{161616} + \frac{17^9}{17^{10}}\right) - \left(\frac{1500}{1600} - \frac{1616}{1717}\right) - 1\right]$

b. $P = \left(\frac{3}{4} - 81\right)\left(\frac{3^2}{5} - 81\right)\left(\frac{3^3}{6} - 81\right)...\left(\frac{3^{2015}}{2018} - 81\right)$

Lời giải:

Thông thường khi gặp một bài dạng tính toán, học sinh thường làm theo quy tắc thông thường và theo thứ tự ưu tiên: từ trái qua phải, trong ngoặc, nhân chia, cộng trừ… Tuy nhiên có những biểu thức quá phức tạp, số lớn và cũng không thể rút gọn hay quy đồng, khai căn thì chúng ta phải quan sát rộng ra, để ý tổng thể của bài toán xem có chứa thừa số nào mà dễ dàng tính được giá trị của nó bằng 0 hay không.

a. Biểu thức trong ngoặc thứ nhất rất khó tính toán, ta để ý biểu thức thứ 2:

$\left(\frac{151515}{161616} + \frac{17^9}{17^{10}}\right) - \left(\frac{1500}{1600} - \frac{1616}{1717}\right) - 1 = \left(\frac{15}{16} + \frac{1}{17}\right) - \left(\frac{15}{16} - \frac{16}{17}\right) - 1 = 0$. Như vậy S = 0.

b. Số hạng tổng quát thứ k của P có dạng $p_k = \frac{3^k}{k+3} - 81$ tuy có quy luật nhưng không thể biến đổi được, vậy ta thử tìm xem trong các thừa số của P có thừa số nào bằng 0 hay không.

Dễ dàng nhận thấy $p_6 = \frac{3^6}{6+3} - 81 = 3^4 - 81 = 0$. Vậy chắc chắn P = 0.

Bài toán 9:

Cho 2 biểu thức A = $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2022} + \frac{1}{2023}$ và

B = $\frac{2022}{1} + \frac{2021}{2} + \frac{2020}{3} + \frac{2019}{4} + \ldots + \frac{3}{2020} + \frac{2}{2021} + \frac{1}{2022}$.

Tính $\frac{A}{B}$.

[Đề thi chọn đội tuyển học sinh giỏi Toán lớp 6]

Lời giải:

Để làm các bài toán dạng này chúng ta thường tìm cách biến đổi tổng phức tạp hơn. Với nhận xét rằng: tổng tử số và mẫu số của các phân số trong B luôn bằng 2023 không đổi nên ta sẽ tách 2022 thành tổng 2022 số 1 và ghép với 2021 phân số khác, số 1 còn lại viết thành $\frac{2023}{2023}$:

B = $\frac{2022}{1} + \frac{2021}{2} + \frac{2020}{3} + \frac{2019}{4} + \ldots + \frac{3}{2020} + \frac{2}{2021} + \frac{1}{2022} = \left(\frac{2021}{2} + 1\right) + \left(\frac{2020}{3} + 1\right) + \left(\frac{2019}{4} + 1\right) + \ldots + \left(\frac{3}{2020} + 1\right) + \left(\frac{2}{2021} + 1\right) + \left(\frac{1}{2022} + 1\right) + 1$

$= \frac{2023}{2} + \frac{2023}{3} + \ldots + \frac{2023}{2021} + \frac{2023}{2022} + \frac{2023}{2023} = 2023\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2022} + \frac{1}{2023}\right) = 2023A.$

Suy ra $\frac{A}{B} = \frac{1}{2023}$.

BÀI TẬP TỰ GIẢI

Bài 1. *[Đề thi Olympic lớp 6 quận Hoàng Mai – Hà Nội 2016 – 2017]*

Tính giá trị biểu thức sau một cách hợp lý S = $\left(1 + \frac{1}{1+2}\right)\left(1 + \frac{1}{1+2+3}\right)\left(1 + \frac{1}{1+2+3+4}\right) \ldots \left(1 + \frac{1}{1+2+3+\ldots+997}\right)$

Bài 2. Cho biểu thức S = $1 + \frac{1}{1+3} + \frac{1}{1+3+5} + \ldots + \frac{1}{1+3+5+\ldots+2023}$.

Chứng minh rằng $S < \frac{3}{4}$.

Bài 3.*[Đề thi chọn HSG toán lớp 8]*

a. Tính tổng sau một cách hợp lý:

$S = 2023^2 + 2021^2 + \ldots + 3^2 + 1 - (2022^2 + 2018^2 + \ldots + 4^2 + 2^2)$

b. Cho $E = 2018! + \frac{2018!}{2} + \frac{2018!}{2} + \ldots + \frac{2018!}{2017} + \frac{2018!}{2018}$. Chứng minh rằng E chia hết cho 2019.

Bài 4. *[Đề thi Olympic lớp 6 quận Hoàng Mai – Hà Nội 2017 – 2018]*

a. Không tính giá trị biểu thức, hãy so sánh A và B biết:

$A = \frac{22}{27} + \frac{11}{17} + \frac{20}{39} + \frac{18}{43}$ và $B = \frac{14}{39} + \frac{4}{7} + \frac{22}{29} + \frac{18}{41}$

b. Tính giá trị biểu thức sau một cách hợp lý:

$$M = \frac{4 + \frac{3}{5} + \frac{3}{7} + \ldots + \frac{3}{95} + \frac{3}{97} + \frac{3}{99}}{\frac{1}{1.99} - \frac{1}{3.97} - \frac{1}{5.95} - \ldots - \frac{1}{95.5} - \frac{1}{97.3} - \frac{1}{99.1}}$$

Bài 5. *[Đề thi Olympic lớp 6 quận Hoàng Mai – Hà Nội 2018 – 2019]*

Tính giá trị biểu thức sau một cách hợp lý:

$$N = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \frac{1}{30} + \ldots + \frac{1}{9120} + \frac{1}{9506} + \frac{1}{9900}}{50 - \frac{50}{51} - \frac{51}{52} - \frac{52}{53} - \ldots - \frac{97}{98} - \frac{98}{99} - \frac{99}{100}}$$

(còn tiếp)

Lớp chuyên Toán thầy Sổ

Liên hệ: 093.464.1088

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. X. V. Cônhiagin, G. A. Tônôian, I. F. Sarưghin: Các đề thi vô địch toán của các nước (Nguyễn Đễ, Nguyễn Khánh Nguyên dịch từ tiếng Nga), Nhà xuất bản Hải Phòng, 1993.

2. Đề thi HSG các cấp của các quận(huyện), tỉnh(thành phố) trên cả nước, đề thi VMO, IMO.

3. Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ.

4. Các chuyên đề SEMINAR Hội toán học Hà Nội.

5. Các website về Toán học trong nước và nước ngoài.