Một số chuyên đề

TOÁN NÂNG CAO DÀNH CHO HỌC SINH PHỔ THÔNG

w w w . t o a n h o c v i e t n a m . c o m

Tác giả: **Nguyễn Kim Sổ**

Hội Toán học Việt Nam

CÁC KÝ HIỆU TOÁN HỌC THÔNG DỤNG DÙNG TRONG TÀI LIỆU

1. **IMO** : Cuộc thi học sinh giỏi toán quốc tế.
2. **VMO** : Kỳ thi học sinh giỏi quốc gia Việt Nam.
3. **ĐHKHTN** : Đại học Khoa Học Tự Nhiên.
4. **ĐHSPHN** : Đại học Sư Phạm Hà Nội.
5. **N** : Tập số tự nhiên.
6. **N***: Tập các số nguyên dương.
7. **Z** : Tập các số nguyên.
8. **Q** : Tập số hữu tỷ.
9. **R** : Tập số thực.
10. Ø : Tập rỗng.
11. **a ⋮ b** : a chia hết cho b.
12. **d|m** : d là ước số của m.
13. **ƯCLN(a; b)** : Ước số chung lớn nhất của 2 số a và b.
14. **BCNN(a; b)** : Bội số chung nhỏ nhất của 2 số a và b.
15. **(a; b) = 1** : Hai số a và b nguyên tố cùng nhau.
16. $\sum_{i=1}^{n} x_i$: Tổng $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ (tổng Sigma).
17. $\prod_{i=1}^{n} x_i$: Tích $x_1 . x_2 \ldots x_n$.
18. **n!** : Tích n số nguyên dương đầu tiên.
19. **[x]** : Phần nguyên của số thực x, là số nguyên không vượt quá x.
20. **{x}** : Phần lẻ của số thực x, {x} = x – [x].
21. **BĐT** : Bất đẳng thức.
22. **VT** : Vế trái.
23. **VP** : Vế phải.

Kỹ thuật Cauchy ngược hướng…

Bất đẳng thức trong chương trình Toán phổ thông là một dạng toán hay và khó. Các bài tập chứng minh BĐT hoặc tìm GTNN, GTLN thường là bài cuối cùng trong các đề dùng để phân loại học sinh, trong các kì thi học sinh giỏi các cấp, thi vào các trường chuyên lớp chọn.

Bất đẳng thức Côsi là một trong những bất đẳng thức cổ điển quan trọng bậc nhất, thông dụng nhất. Tên chính xác là bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân, nhiều người gọi là bất đẳng thức AM – GM (AM là viết tắt của Arithmetic mean và GM là viết tắt của Geometric mean).

Có nhiều cách để chứng minh nhưng cách chứng minh quy nạp của nhà toán học người Pháp Augustin – Louis Cauchy (1789 – 1857) được đánh giá là hay, hiệu quả nên nhiều người nhầm lẫn rằng Cauchy phát hiện ra bất đẳng thức nêu trên nhưng thực tế ông chỉ là người đưa ra cách chứng minh rất đẹp của mình chứ không phải là người phát hiện ra đầu tiên(theo wikipedia.org). Và cũng do cách chứng minh đặc sắc này mà chúng ta hay gọi là bất đẳng thức Cauchy.

KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Bất đẳng thức Cauchy(AM - GM)

Cho $n (n \in N, n \geq 2)$ số thực dương $x_1, x_2, \dots, x_n$ khi đó:

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 . x_2 \dots x_n}$$

Hoặc được viết dưới các dạng khác:

1. $x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq n\sqrt[n]{x_1 . x_2 \dots x_n}$
2. $\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right)^n \geq x_1 . x_2 \dots x_n$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \dots = x_n$

Lưu ý:

Đa số bài toán không xuất hiện định dạng để áp dụng ngay mà phải thêm bớt, biến đổi. Kinh nghiệm để biến đổi là sử dụng và dự đoán điều kiện để dấu "=" xảy ra rồi nhân chia cộng trừ hoặc đổi biến cho thích hợp.

Trong các đề thi cũng chỉ 2, 3 số(hoặc 2, 3 bộ số) nên học sinh cần phải nhớ các trường hợp đơn giản này: với $x, y \geq 0$ thì $x + y \geq 2\sqrt{xy}$, dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = y$ hoặc với 3 số $a, b, c \geq 0$ khi đó $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$, dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Với các bài toán đặc biệt có mẫu số, nếu áp dụng ngay sẽ dẫn đến bất đẳng thức bị đổi chiều và khi đó ta không thể sử dụng tính chất bắc cầu, do vậy cần phải tinh tế trong biến đổi, cụ thể là cố gắng thêm bớt để tạo ra dấu "–" trước các phân số đó và người ta gọi đó là "kỹ thuật Cauchy ngược hướng".

Chúng ta cùng xem ví dụ sau để hiểu rõ hơn:

Bài toán 1:
Cho a, b, c, d là các số thực không âm. Chứng minh rằng:
$$\frac{a^3}{a^2+b^2}+\frac{b^3}{b^2+c^2}+\frac{c^3}{c^2+d^2}+\frac{d^3}{d^2+a^2} \geq \frac{a+b+c+d}{2}.$$

[Đề thi HSG lớp 9 huyện Gia Lâm – Hà Nội 2022 – 2023]

Lời giải:

Dự đoán rằng dấu "=" xảy ra khi $a = b = c = d$ và cũng là đủ để áp dụng BĐT AM – GM với các mẫu số. Tuy nhiên khi đó bất đẳng thức sẽ đổi chiều!

Vì vậy ta sẽ biến đổi như sau:

$$\frac{a^3}{a^2+b^2}=\frac{a^3+ab^2-ab^2}{a^2+b^2}=\frac{a(a^2+b^2)-ab^2}{a^2+b^2}=a-\frac{ab^2}{a^2+b^2}$$

Vì $a^2 + b^2 \geq 2ab$ nên $\frac{ab^2}{a^2+b^2} \leq \frac{ab^2}{2ab} = \frac{b}{2}$, suy ra $a - \frac{ab^2}{a^2+b^2} \geq a - \frac{b}{2}$.

Hoàn toàn tương tự ta cũng thu được:

$\frac{b^3}{b^2+c^2} \geq b - \frac{c}{2}$; $\frac{c^3}{c^2+d^2} \geq c - \frac{d}{2}$; $\frac{d^3}{d^2+a^2} \geq d - \frac{a}{2}$.

Do đó: $\frac{a^3}{a^2+b^2} + \frac{b^3}{b^2+c^2} + \frac{c^3}{c^2+d^2} + \frac{d^3}{d^2+a^2} \geq a - \frac{b}{2} + b - \frac{c}{2} + c - \frac{d}{2} + d - \frac{a}{2} = \frac{a+b+c+d}{2}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi a = b = c = d. Bài toán được chứng minh.

Bài toán 2:
Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:
$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^3}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^3}{c^2+ca+a^2} \geq \frac{a+b+c}{3}$.

Lời giải:

Vì a, b, c là các số thực không âm nên ta nghĩ đến bất đẳng thức Cauchy:

$ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$ suy ra $\frac{a^3}{a^2+ab+b^2} \geq \frac{a^3}{a^2+\frac{a^2+b^2}{2}+b^2} = \frac{2}{3}.\frac{a^3}{a^2+b^2} = \frac{2}{3}.\frac{a(a^2+b^2)-a.b^2}{a^2+b^2} = \frac{2}{3}\left(a - \frac{a.b^2}{a^2+b^2}\right) \geq \frac{2}{3}\left(a - \frac{a.b^2}{2ab}\right)$. Hay $\frac{a^3}{a^2+ab+b^2} \geq \frac{2}{3}\left(a - \frac{b}{2}\right)$.

Chứng minh tương tự: $\frac{b^3}{b^2+bc+c^2} \geq \frac{2}{3}\left(b - \frac{c}{2}\right)$ và $\frac{c^3+a^3}{c^2+ca+a^2} \geq \frac{2}{3}\left(c - \frac{a}{2}\right)$.

Từ đó $S = \frac{a^3}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^3}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^3}{c^2+ca+a^2} \geq \frac{2}{3}\left(a - \frac{b}{2}\right) + \frac{2}{3}\left(b - \frac{c}{2}\right) + \frac{2}{3}\left(c - \frac{a}{2}\right) = \frac{a+b+c}{3}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi a = b = c.

Ngoài ra nếu để ý đến định dạng bài toán, chúng ta có cách giải khác khá tự nhiên như sau:

Đặt $S = \frac{a^3}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^3}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^3}{c^2+ca+a^2}$ và $P = \frac{b^3}{a^2+ab+b^2} + \frac{c^3}{b^2+bc+c^2} + \frac{a^3}{c^2+ca+a^2}$ khi đó:

$S - P = \frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^3-c^3}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^3-a^3}{c^2+ca+a^2} = a - b + b - c + c - a = 0$ hay $S = P$.

Do vậy $2S = \frac{a^3+b^3}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^3+c^3}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^3+a^3}{c^2+ca+a^2} = (a+b)\frac{a^2-ab+b^2}{a^2+ab+b^2} + (b+c)\frac{b^2-bc+c^2}{b^2+bc+c^2} + (c+a)\frac{c^2-ca+a^2}{c^2+ca+a^2}$.

Dễ dàng chứng minh được $\frac{a^2-ab+b^2}{a^2+ab+b^2} \geq \frac{1}{3}$; $\frac{b^2-bc+c^2}{b^2+bc+c^2} \geq \frac{1}{3}$ và $\frac{c^2-ca+a^2}{c^2+ca+a^2} \geq \frac{1}{3}$ suy ra: $2S \geq \frac{1}{3}(a+b) + \frac{1}{3}(b+c) + \frac{1}{3}(c+a) \Rightarrow S \geq \frac{a+b+c}{3}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi a = b = c. Bài toán được chứng minh.

Lời bình:

Cách 2 được biến đổi và giải một cách rất tự nhiên, phương pháp này được sử dụng với từng dạng toán cụ thể với cấu trúc đặc biệt. Cách 1 tương đối phức tạp nhưng đổi lại qua quá trình làm việc chúng ta lại thu được những kết quả quan trọng là bất đẳng thức: $\frac{a^3}{a^2+ab+b^2} \geq \frac{2}{3}\left(a - \frac{b}{2}\right)$ *với mọi a, b > 0 mà sẽ được dùng tương đối nhiều về sau này.*

Bài toán 3:
Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:
$$\frac{\sqrt{ab}}{2\sqrt{ab}+c} + \frac{\sqrt{bc}}{2\sqrt{bc}+a} + \frac{\sqrt{ca}}{2\sqrt{ca}+b} \leq 1.$$

Lời giải:

Nếu áp dụng ngay bất đẳng thức Cauchy với mẫu số thì bài toán sẽ đổi chiều(tạo ra dạng A ≥ B ≤ C, đây là điều tối kỵ khi làm toán và chắc chắn bất kỳ học sinh yêu toán nào cũng đã từng gặp tình trạng như vậy không phải một lần!). Vì thế ta biến đổi như sau: $\frac{\sqrt{ab}}{2\sqrt{ab}+c} + \frac{\sqrt{bc}}{2\sqrt{bc}+a} + \frac{\sqrt{ca}}{2\sqrt{ca}+b} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{c}{2\sqrt{ab}+c}\right) + \frac{1}{2}\left(1-\frac{a}{2\sqrt{bc}+a}\right) + \frac{1}{2}\left(1-\frac{b}{2\sqrt{ca}+b}\right) = \frac{3}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2\sqrt{bc}+a}+\frac{b}{2\sqrt{ca}+b}+\frac{c}{2\sqrt{ab}+c}\right)$.

Sử dụng BĐT AM – GM: $2\sqrt{bc} \le b + c \Rightarrow \frac{a}{2\sqrt{bc}+a} \ge \frac{a}{a+b+c}$; Tương tự $\frac{b}{2\sqrt{ca}+b} \ge \frac{b}{a+b+c}$ và $\frac{c}{2\sqrt{ab}+c} \ge \frac{c}{a+b+c}$, suy ra: $\frac{a}{2\sqrt{bc}+a}+\frac{b}{2\sqrt{ca}+b}+\frac{c}{2\sqrt{ab}+c} \ge \frac{a+b+c}{a+b+c} = 1$

Do đó $\frac{\sqrt{ab}}{2\sqrt{ab}+c} + \frac{\sqrt{bc}}{2\sqrt{bc}+a} + \frac{\sqrt{ca}}{2\sqrt{ca}+b} \le 1$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi a = b = c.

Bài toán được chứng minh.

Bài toán 4:
Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn a + b + c = 1.
Chứng minh rằng: $\frac{a}{1+9b^2}+\frac{b}{1+9c^2}+\frac{c}{1+9a^2} \ge \frac{1}{2}$.

Lời giải:

Với đề bài như thế này chúng ta dễ dàng đoán được điều kiện dấu "=" xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{3}$. Khi đó $1 = 9a^2 = 9b^2 = 9c^2$ và nghĩ đến việc sử dụng bất đẳng thức Cauchy. Tuy nhiên do các biểu thức $1 + 9a^2$, $1 + 9b^2$, $1 + 9c^2$ nằm dưới mẫu nên nếu sử dụng ngay sẽ dẫn đến bất đẳng thức bị đảo chiều! Do đó cũng như các ví dụ trên, ta thêm bớt như sau:

Đặt $S = \frac{a}{1+9b^2}+\frac{b}{1+9c^2}+\frac{c}{1+9a^2}$ khi đó:

$S = \frac{a(1+9b^2)-9ab^2}{1+9b^2}+\frac{b(1+9c^2)-9bc^2}{1+9c^2}+\frac{c(1+9a^2)-9ca^2}{1+9a^2} = a+b+c-\left(\frac{9ab^2}{1+9b^2}+\frac{9bc^2}{1+9c^2}+\frac{9ca^2}{1+9a^2}\right) = 1-\left(\frac{9ab^2}{1+9b^2}+\frac{9bc^2}{1+9c^2}+\frac{9ca^2}{1+9a^2}\right)$.

Đến đây sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có:

$1 + 9b^2 \geq 2\sqrt{1.9b^2} = 6b$, tương tự $1 + 9c^2 \geq 6c$; $1 + 9a^2 \geq 6a$.

$\Rightarrow \frac{9ab^2}{1+9b^2} + \frac{9bc^2}{1+9c^2} + \frac{9ca^2}{1+9a^2} \leq \frac{9ab^2}{6b} + \frac{9bc^2}{6c} + \frac{9ca^2}{6a} = \frac{3}{2}(ab + bc + ca)$.

Sử dụng bất đẳng thức quen thuộc: $ab + bc + ca \leq \frac{1}{3}(a + b + c)^2 = \frac{1}{3}$.

Suy ra $\frac{9ab^2}{1+9b^2} + \frac{9bc^2}{1+9c^2} + \frac{9ca^2}{1+9a^2} \leq \frac{1}{2}$, từ đó $S \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$. Bài toán được chứng minh.

Bài toán 5:
Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a + b + c = 3$.
Chứng minh rằng: $\frac{1}{a^2 + abc} + \frac{1}{b^2 + abc} + \frac{1}{c^2 + abc} \geq \frac{3}{2}$.

Lời giải:

Từ điều kiện bài toán và sử dụng BĐT Cauchy ta có: $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} \Rightarrow abc \leq 1$. Do đó:

$$\frac{1}{a^2+abc} + \frac{1}{b^2+abc} + \frac{1}{c^2+abc} \geq \frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} + \frac{1}{c^2+1} = \left(1 - \frac{a^2}{a^2+1}\right) + \left(1 - \frac{b^2}{b^2+1}\right) + \left(1 - \frac{c^2}{c^2+1}\right) = 3 - \left(\frac{a^2}{a^2+1} + \frac{b^2}{b^2+1} + \frac{c^2}{c^2+1}\right).$$

Vì $a^2 + 1 \geq 2a$; $b^2 + 1 \geq 2b$ và $c^2 + 1 \geq 2c \Rightarrow \frac{a^2}{a^2+1} + \frac{b^2}{b^2+1} + \frac{c^2}{c^2+1} \leq \frac{a^2}{2a} + \frac{b^2}{2b} + \frac{c^2}{2c} = \frac{1}{2}(a + b + c) = \frac{3}{2}$. Suy ra $\frac{1}{a^2+abc} + \frac{1}{b^2+abc} + \frac{1}{c^2+abc} \geq 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. Bài toán được chứng minh.

Bài toán 6:
Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a + b + c = 3$.
Tìm GTNN của biểu thức: $S = \frac{a^2}{a+b^2} + \frac{b^2}{b+c^2} + \frac{c^2}{c+a^2}$.

Lời giải:

Cũng như các bài toán trên, ta biến đổi:

$S = \frac{a^2}{a+b^2} + \frac{b^2}{b+c^2} + \frac{c^2}{c+a^2} = \frac{a(a+b^2) - ab^2}{a+b^2} + \frac{b(b+c^2) - bc^2}{b+c^2} + \frac{c(c+a^2) - ca^2}{c+a^2}$

$= (a+b+c) - \left(\frac{ab^2}{a+b^2} + \frac{bc^2}{b+c^2} + \frac{ca^2}{c+a^2}\right) = 3 - \left(\frac{ab^2}{a+b^2} + \frac{bc^2}{b+c^2} + \frac{ca^2}{c+a^2}\right)$.

Đặt $P = \frac{ab^2}{a+b^2} + \frac{bc^2}{b+c^2} + \frac{ca^2}{c+a^2}$, sử dụng BĐT AM – GM ta có $a + b^2 \geq 2b\sqrt{a}$, $b + c^2 \geq 2c\sqrt{b}$ và $c + a^2 \geq 2a\sqrt{c}$ suy ra $P \leq \frac{1}{2}(b\sqrt{a} + c\sqrt{b} + a\sqrt{c}) = \frac{1}{2}(\sqrt{b}\sqrt{ab} + \sqrt{c}\sqrt{bc} + \sqrt{a}\sqrt{ca})$.

Sử dụng BĐT Bunhiacopxki $(\sqrt{b}\sqrt{ab} + \sqrt{c}\sqrt{bc} + \sqrt{a}\sqrt{ca})^2 \leq (a+b+c)(ab+bc+ca) = 3(ab+bc+ca) \leq (a+b+c)^2 = 9 \Rightarrow \sqrt{b}\sqrt{ab} + \sqrt{c}\sqrt{bc} + \sqrt{a}\sqrt{ca} \leq 3$ $\Rightarrow P \leq \frac{3}{2}$. Do đó $S \geq 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Kết luận: GTNN của S là $\frac{3}{2}$.

BÀI TẬP TỰ GIẢI

Bài 1. Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn a + b + c = 3.

Chứng minh rằng: $\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2} \geq \frac{3}{2}$.

Bài 2. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $0 \leq a, b, c < 2$.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{2-a}+\frac{1}{2-b}+\frac{1}{2-c} \geq \frac{a^2+b^2+c^2+3}{2}$.

Bài 3*. Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn abc = 1.

Chứng minh rằng: $\frac{a^4 b}{a^2+1}+\frac{b^4 c}{b^2+1}+\frac{c^4 a}{c^2+1} \geq \frac{3}{2}$.

Bài 4*. Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

Chứng minh rằng: $\frac{a}{1+bc}+\frac{b}{1+ca}+\frac{c}{1+ab} \geq 1$.

Những bài tập này có thể giải quyết bằng nhiều phương pháp khác nhau nhưng bạn hãy thử đặt bút và làm bằng kỹ thuật Cauchy ngược hướng. Sẽ rất thú vị và hiệu quả!

(còn tiếp)

Lớp chuyên Toán thầy Sổ

Liên hệ: 093.464.1088

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. X. V. Cônhiagin, G. A. Tônôian, I. F. Sarưghin: Các đề thi vô địch toán của các nước (Nguyễn Đễ, Nguyễn Khánh Nguyên dịch từ tiếng Nga), Nhà xuất bản Hải Phòng, 1993.

2. Đề thi HSG các cấp của các quận(huyện), tỉnh(thành phố) trên cả nước, đề thi VMO, IMO.

3. Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ.

4. Các chuyên đề SEMINAR Hội toán học Hà Nội.

5. Các website về Toán học trong nước và nước ngoài.